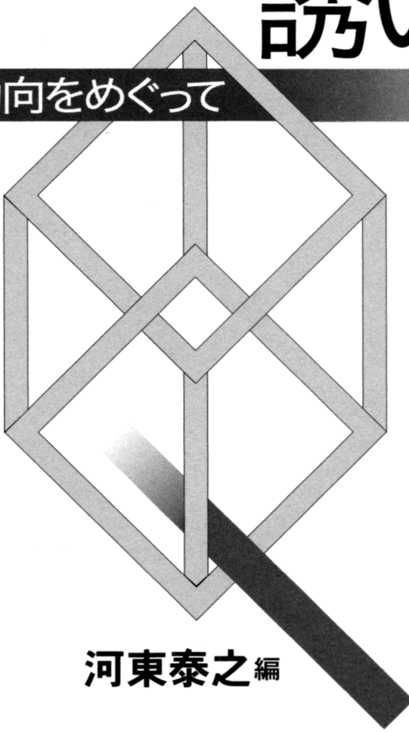
数理物理への誘い 7

最新の動向をめぐって



河東泰之 編

遊星社

目　次

第2話　数理物理学(繰り込み群)的視点からみたペレルマン理論　伊東恵一　53

第3話　リッチフローと4次元異種微分構造

石田政司　101

装丁＝海保　透

既刊の内容

【第１集】 ———————————————————— （江沢 洋 編）

幾何学的描像と非可換の世界（大森英樹）／KZ 方程式から位相不変量へ（河野俊丈）／可解格子模型（国場敦夫）／確率論から見たスピン系の相転移（黒田耕嗣）／Path Integral 入門（一瀬 孝）／ランダムウォーク表示，臨界現象，場の量子論（近藤慶一）／量子群 $SU_q(1,1)$（上野喜三雄）／量子群 $SU_q(2)$ と q 解析（野海正俊）／量子群上のフーリエ解析（中神祥臣）／拘束系の力学とホモロジー（村井信行）／ウェーブレット解析（山田道夫）

【第２集】 ———————————————————— （荒木不二洋 編）

フラクタル・パターン形成の物理（松下 貢）／ハミルトン系とカオス（丹羽敏雄）／ゲージ場の幾何学への誘い（深谷賢治）／アインシュタイン計量とモジュライ空間（満渕俊樹）／量子重力と弦理論（川合 光）／量子力学における位相（矢吹治一）／ゲージ理論における正準交換関係の表現とアハラノフ - ボーム効果（新井朝雄）

【第３集】 ———————————————————— （江沢 洋 編）

原子や分子を数学で見る（磯崎 洋）／多体問題の話題から（粟田英資）／２次元共形場理論の変形問題（梁 成吉）／場の理論におけるヤンギアン対称性（中西知樹）／非可換幾何とゲージ理論（森田克貞）／非単連結空間上のゲージ量子力学（新井朝雄）／観測理論の数理（小澤正直）

【第４集】 ———————————————————— （荒木不二洋 編）

くりこみ群と素粒子論（青木健一）／繰り込み群解析（渡辺 浩）／相転移と緩和現象（吉田伸生）／部分因子環と代数的場の量子論（泉 正己）／非可換幾何学と指数定理（森吉仁志）／開放系のスペクトル解析（廣島文生）／スペクトル理論と逆問題（磯崎 洋）

【第５集】 ———————————————————— （河東泰之 編）

乱流の摂動理論（木田重雄）／乱流のマルティフラクタル解析（有光敏彦・有光直子）／周期波の弱非線形解析（小川知之）／オイラー・ポアンカレ形式による渦のトポロジーと力学（福本康秀）／非可換幾何学の不思議な世界（夏目利一）／非可換空間上のゲージ理論（綿村 哲）／エントロピー・リャプノフ指数・SBR 測度（盛田健彦）

【第６集】 ———————————————————— （小嶋 泉 編）

頂点作用素の物理（粟田英資）／モンスター単純群と頂点作用素代数（山田裕理）／最大位数の散在型単純群，モンスターの構造について（吉荒 聡）／W 代数の話（脇本実）／ランダム行列と自由確率論（日合文雄・植田好道）／ランダム行列と非衝突過程（香取眞理・種村秀紀）／行列のブラウン運動と量子準位統計（永尾太郎）／量子カオスの現在と未来（中村勝弘）

まえがき

サマースクール数理物理は，1987 年に荒木不二洋，江沢洋両先生によって始められ，2001 年までほぼ毎年，学習院大学で開催されてきた．2002 年より小嶋泉先生と私が担当を引き継ぎ，現在では会場を東京大学数理科学研究科（駒場キャンパス）に移して開催されている．2009 年からは緒方芳子先生にも世話人に加わっていただいている．「これから研究を始めようとしている大学院生や，数理物理の広い分野にわたる（専門外の）研究者を対象とする入門的な講義を行う」というのが趣旨であるが，『数学セミナー』や『数理科学』にも案内を出し，学部学生，企業研究者，高校教諭や一般社会人まで広い範囲の参加者を集めるユニークな催しである．通常 4 人の講演者にそれぞれ，90 分講演を 3 回ずつしていただいているのだが，あらかじめかなり詳しい予稿を書いていただき，それを会場で配布するというのが伝統になっており，予稿集は例年，合計百数十ページに及ぶ立派なものとなっている．その予稿集を元に，一般向けの原稿として書き直していただいたものが，これまで『数理物理への誘い 1 ～ 6』として遊星社から出版されており，本書はその続巻として，2007 年「Bose-Einstein condensation を巡る数理と物理」，2008 年「リッチフローの微分幾何と位相幾何」の講義に基づいてまとめられたものである．

上にも書いたように，大変幅広い範囲から参加者が集まることがこのサマースクールの特徴の一つであり，この点で一般の数学や物理の研究集会とはかなり異なっている．テーマにかかわりなく毎年出席しているという固定ファンも少なくない．このサマースクールは，これからもしばらくは毎年 8 月な

いし9月に東京大学駒場キャンパスで開催していく予定であり，下記のウェブページにこれまでの情報，これからの予定が掲載されているので，最新の情報についてはこちらをご覧いただきたい．

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/mp-old.htm

本書に収録した各篇の内容について簡単に説明しておこう．今回は，本シリーズのこれまでの単行本に比べ，1本あたりの分量を増やし，より詳しく説明していただいていることが特徴である．また，各篇の内容は独立であり，どれからでも読めるようになっている．2本目と3本目は関連しているが，2本目を先に読まなくてはいけないということではない．

最初の小嶋泉先生の『「量子古典対応」と「凝縮状態」』は，2007年の「Bose-Einstein condensation を巡る数理と物理」からの記事である．ボーズ・アインシュタイン凝縮とは，超低温において原子気体が普通の常識からはずれたふるまいを示す現象である．その名が示すとおり，ボーズのアイディアを基に，アインシュタインが1925年に予言したものである．近年，これが実験的に実現され，その成果に対し，2001年度のノーベル物理学賞が与えられている．小嶋先生の記事は，この現象をもとに，量子統計力学の根本にある数学的な構造をミクロ・マクロ双対性の立場から解説するものである．

この後の2本は，2008年の「リッチフローの微分幾何と位相幾何」からの記事である．ロシアの数学者ペレルマンが，約100年間未解決であったポアンカレ予想を2003年にインターネットで公開した論文によって解決したこと，しかしこれに伴う2006年のフィールズ賞受賞を拒否したこと，またこの問題にかかっていたクレイ研究所の100万ドルの賞金にもまったく興味を示していないことなどは，広く報道されたのでご存じの方も多いであろう．(ただしクレイ研究所の100万ドルはまだ授与すると決定してはいないので，正式に拒否したわけではない．クレイ研究所としても困っているのであろう．)

このポアンカレ予想は純粋に数学的な問題であるが，ペレルマンによる解決には数理物理学に関連したアイディアが用いられており，またそこから別の数理物理学の問題への関係も生じている．そこで，このホットなテーマについて2008年のサマースクールが開かれたわけである．

まず，伊東恵一先生の「数理物理学（繰り込み群）的視点からみたペレルマン理論」は，この，数理物理学との関連について説明していただいた記事である．ペレルマンの解法の基本は，リーマン計量に関するリッチフロー方程式と呼ばれる非線形微分方程式を用いることである．幾何学的背景を忘れて，単にこの微分方程式だけを見ると，物理学においてよく似た微分方程式があちこちに現れていることがわかる．中でもとくに重要なものがシグマモデルの繰り込み群方程式である．本記事では，繰り込み群方程式とは何か，というところから始めて，シグマモデルとの関連，さらに統計力学や宇宙理論との関連について解説していただいた．

一方，石田政司先生の「リッチフローと4次元異種微分構造」は，4次元におけるリッチフローの数学的な側面について解説していただいたものである．リッチフロー方程式の幾何学的背景は，リーマン計量を時間的に変化させて，「きれいな」形に持っていこうというアイディアで，これはハミルトンによって1980年代に導入された．ポアンカレ予想は任意の次元で考えられるが，3次元以外ではすでに解かれていたので，最後に残ったのはもともとポアンカレが考えた3次元の場合であった．ペレルマンはこれを解いたわけだが，リッチフロー方程式自体もどの次元でも考えることができる．4次元のポアンカレ予想は前から解かれていたわけだが，4次元でリッチフロー方程式を考えると，最新の数理物理学との新たな関係が見られ，大変興味深いのである．4次元の幾何学には1980年代に大きな進展があり，4次元ポアンカレ予想を解決したフリードマン，また関連するドナルドソンらの仕事によって，位相構

造が同じでも微分構造が異なる場合がたくさんあるということがわかってきた．（フリードマン，ドナルドソンはこの業績により 1986 年のフィールズ賞を同時に受賞している．）これが「異種」微分構造と呼ばれるものである．こちらの理論が発展したところに，1990 年代にサイバーグ - ウィッテン方程式が導入され，ゲージ理論のアイディアによって現在も研究が大きく進んでいる．この進展について基礎から解説していただいたものである．

さて，このサマースクールは，幅広いテーマを幅広い聴衆に向かって発信する内容で続けてきた．サマースクールそのものにもより多くの方々に参加していただきたいと思っているが，時間的，場所的な制約からやはり出席できる人の数は限られているし，サマースクールの後何年もたってからその内容に興味を持つ若い方もいらっしゃるであろう．したがって，より広い範囲の読者に届くように，このような単行本の形で出版されることは大変意義深いことと考えている．各稿にはそれぞれ参考文献表もついているので，より深いことを勉強したいと思った際に有用であろう．話題によっては，最近の研究成果の大半がインターネット上のプレプリントサーバー

http://arxiv.org/

で手に入ることもふれておきたい．参考文献中に，arXiv:math/0211159 などのような番号がついているものはここで誰でも無料で入手できる．（この番号はペレルマンによる 1 本目のポアンカレ予想の論文である．他の 2 本もこのサイトで入手できる．）

本書によってより多くの方が数理物理学の最近の発展に興味を持っていただければ幸いである．

2009 年 12 月　　河東 泰之

「量子古典対応」と「凝縮状態」

小嶋　泉

1 「量子古典対応」と「凝縮状態」

2007 年度 Summer School 数理物理のテーマとして取り上げられた原子気体の “ボーズ・アインシュタイン凝縮”（以下，atomic BEC と略称）は，1995 年の発見以来,「熱力学的極限に到達する前に」相転移と量子性の本質を可視化するきわだった現象として，多方面から大きな関心を集めている．物理的・実験的な詳細は関連分野の専門家による優れた解説書に譲り，ここではその論理的前提となる「量子的ミクロと古典的マクロとの基本的相互関係」という一般的視点から,「**凝縮状態 (condensed states) とは何か?**」を考えることにしたい．以下の考察で基軸的役割を果たす「**量子古典対応**」（または「**対応原理**」）は，

《「**無限個」の量子の凝縮集積効果としてマクロの古典的対象が現れる**》

という形で，量子的ミクロと古典的マクロとが，両者の間の本質的な違いにもかかわらず，互いに切っても切れない関係で深く結ばれている状況を巧みに表現する．これは，量子・古典を橋渡しする重要な直観的描像で，量子力学建設の時代には,「見えるマクロ世界」から未知の「見えないミクロ世界」を手探りする上で非常に有効な導きの糸として機能したが，ひとたび量子力学の標準的理論体系が出来上がると，いつしか忘却の彼方に捨て去られてしまったアイディアである．我々の課題は，主導原理の役割を果たすこの基本的な考え方に明確な数学的定式化を与えることから始まる．

マクロ世界での常識的経験と際立って異なる特徴をもつ「量子現象」は，通常，原子・原子核・素粒子などを主役とする非常に小さなスケールのミクロ世界に限定され，ミクロ量子とマクロ古典の世界の間にはある種の「棲み分け」が見られる．これに対して，atomic BEC の重要な本質は両者の微妙な「クロスオーヴァー」にあり，それによって，量子古典対応の問題が atomic BEC の本質を理解する上で重要なポイントの一つになることは自然に了解されよう．ただし，**「無限個」**という言葉の扱いは要注意で，古くから知られた BEC の場合はよいとしても，atomic BEC では非常に微妙な問題であり，Cantor の意味での「真無限」がここに関係するわけではない．むしろ，ミクロとマクロの中間スケールで「有限系」と見られる状況にありながら「凝縮」効果が実現することが重要で，全体的な perspective の中にそれをどう位置づけるか，ということが恐らく一番非自明な問題になる．しかし，こういう「特殊性」が重要な役割を演ずる問題を適切に理解するには，“generic な” 状況をきちんと押さえ，それとの関係を了解することが実は不可欠である．

しばしば耳にする「量子性」の直観的説明は，連続的に変化するはずの電子のエネルギーが「量子性」ゆえに「量子化＝離散化」され，その結果，古典物理学では説明不可能な原子の離散的エネルギー準位が現れ，それによって原子の安定性が保証される，という言い方である．量子性の本質は「離散性」だけでなく，より重要なのは「量子的コヒーレンス」なので，ダブルスリット実験を持ち出して，空間的に局在している「はずの」電子・光子が実は，二つのスリットを「波として同時に」通り抜け，スリット後方のスクリーンに「干渉縞」を作る，という話が付け加わる．この「波動と粒子の二重性」が「量子性」の本質だとの「要約」に続いて，常識では両立不可能な二つの性質の「二重性・相補性」の合理的扱いには，量子力学教科書にあるような数学的定式化が不可欠になる，という形で「入門的な」話は大体終わる．

この延長上で原子核・素粒子・クォーク・レプトン等々，微視的自然の粒

子構造の議論が続けば,「量子性」と「粒子性」が二重写しになるのは避けられない：自然の基本は「粒子性」にありとの「粒子的自然像」が，専門の物理学者の直観的イメージにまで浸透したのが20世紀だったと言えば，単純化のし過ぎだろうか？ 20世紀初頭のBoltzmannの原子論 対 Machのエネルギー論を巡る深刻な論争，並びに，それが以後の我々の自然観に何をもたらしたか？という興味深いテーマを今ここで復習する余裕はないが，標準的な物理観・物理理論における「粒子」概念の正統視に比べ,「**非粒子的モード**」という描像が受けている「理論的軽視」の扱いに気づくのは，いささか奇妙な感慨に我々を誘う：特に,「非粒子的モード」＝「多粒子の集団運動に基づく凝縮状態」のもつ一般的本質を，相転移・臨界現象において「**秩序変数**」としての（狭義の）凝縮状態が果たす本質的役割と共に思い起こせば，この凝縮状態という「非粒子的モード」こそ，ミクロの量子性を目に見える形で古典的マクロ世界に出現させる不可欠の立て役者であることがわかる．にもかかわらず「非粒子的モード」が粗略に扱われているのはどういうことだろうか？

古典・量子の相互関係を新たな眼で見直すべき重要な理由が，実はここにある：量子力学が建設途上で未だ「完成」してない時期,「見えないミクロ世界」の解明には，当然のことながら,「見えるマクロ」から出発し暗中模索で進むよりほかに手はない．未知の量子と既知の古典とを比較照合しつつ，両者の間を橋渡しするために,「量子古典対応」が決定的な役割を演じたのである．ところが，ひとたび量子力学の標準的理論体系が出来上がってしまうと，その途上,「鋳型」として機能した「量子古典対応」は理論的・数学的定式化を施されることなく放置され，直観的で見すぼらしい「古い杖」としていつしか遠い記憶の彼方に捨て去られてしまった！「見えない量子的ミクロ世界」を律する立派な「法典」は今やすべて量子力学の教科書に書かれており，そこから調達される「便利な道具」を使って具体的な問題を実務的に解けばよ

い，今さら概念的・哲学的問題に頭を悩ましたり，量子・古典の相互関係など突っついてみたところで理論的に有用なものなどもはや何も残っていない，という強固な信念が以後，大方の物理学者の思考を捉えてきた．こうした考え方が現代物理学の大半の領域を支配するようになって，量子と古典は切り離され別物として扱われるに至る（：たとえば，熱力学と量子統計力学を切り離し，前者を後者の一部・「古くさい前時代的遺物」と見做す，という偏見はその corollary ＝随伴命題に過ぎない）.「物理的自然において何が見えるかは理論が決める」という広く流布した（Einstein の）「信念」に従えば，そういう「理論」が原理的に整然と配列されたランダウ・リフシッツの教科書を読めばもはや十分というわけである．本当は量子・古典相互の非自明なつながりこそ問題の最も重要な本質であるにもかかわらず,「量子のナゾ」をひたすら量子的ミクロの不思議さとして，古典的マクロから切り離して追究するものの見方がこうして確立した.

1.1　無限自由度量子系に伴う「病理現象」とミクロ・マクロ遷移

しかるに現実の物理的自然を見渡せば，ミクロからマクロを経て超マクロに及ぶさまざまなスケールにわたって，驚くべき多様性・異質性をもつ階層的諸領域がさまざまに折り重なり相互に影響を及ぼし合いながら，ダイナミックに運動する姿が目に入る．このような多様性・異質性を説明し展開する仕組みが,「物理・化学現象はすべて量子力学から導き出されるべし」との目論見どおり，果たして量子力学の中にすべて組み込まれているのだろうか？ あいにく大方の期待に反して，**標準的教科書に書かれた通常の量子力学の理論体系**にその可能性はないと言わざるを得ない．理由は単純である： 通常の量子力学の対象は有限自由度量子系ゆえ，物理量を表す正準交換関係の代数は，Stone-von Neumann の一意性定理 [1] によって任意表現がただ一つの既約表現（の反復）に帰着され，すべての「表現・表示」は Dirac 変換理論に従って

互いにユニタリー変換で結ばれる[1]．このため，量子的ミクロは常にそれ自身に留まり，自動的にマクロレベルへ移行することは決してないので，ミクロとマクロが絡む現象（たとえば，測定過程）を扱うには，量子系とは別に最初からマクロレベルを「手で」用意しておくしか手はない[2]．「波束の収縮」を起こさせようとした von Neumann が苦し紛れに呼び寄せた有名な "abstraktes Ich（抽象的自我）" [2] の亡霊も，まさしくこのためだった．これは「量子的ミクロ世界とそれを扱う量子論がすべてであり，マクロ世界などその不正確な近似に過ぎない」と考える「ミクロ量子一元論」が内包する深刻な自己矛盾と言うべきではないだろうか？

無限自由度を扱う場の量子論に移行すれば，Stone-von Neumann の一意性は破れ，ミクロからマクロが生成する道が開け得る．ただし「通常の」量子論的考察では，「純粋状態＝既約表現を旨とすべし」との先入見により，せっかくのその芽が「病理現象」として摘み取られてしまう．「どんな物理量も径路積分を使えば計算できる」という標準的「信念」も，実はこの見方に基づいている．もしこの偏見どおりに「非同値」表現が存在しても，それによる「災厄」はうまく回避し続けられるような在り方しかしてないならば，量子世界から古典世界が産み出されることはあり得ず，両者を含む物理的自然を統一的に説明する見込みはない．以下で，その理由を順次説明しよう．

確かに，相対論的量子場理論に「非同値」表現がわんさとあって，たとえば，相互作用する量子場を相対論的共変性を保ったまま自由場とつなぐ Dyson S-行列は「本当は」定義できない (Haag の定理 [3]) とか，対称性が自発的に破れると変換前後の表現の非同値性のために symmetry 生成子（＝対称性変換を生成する charge operator）が定義不能になる，というふうに，無限自由度量子系に種々の「病理現象」＝ "no-go theorem" がつきものだというのは

[1] ただし，Weyl 型の有界演算子，あるいは，それに "affiliated" な演算子による表現の場合．非有界演算子と境界条件を用いた状況では非同値表現が現れ得る．

[2] これは境界条件を課した非同値表現の扱いにも当てはまる．

「よく知られ」ている．そのため場の量子論を習うと，そうした「地雷」を踏まないよう気をつけろ，との「警告」がしばしば繰り返される．問題なのは，それらを《「不正常な病理現象」で，「正常な」理論の本筋ではない》と見做す「偏見」であり，かつ，それが根強く流布している事態である．

たとえば，「超選択則」の教科書的説明 [3, 4] には，そういう「偏見」の一端が，問わず語りに顔をのぞかせる：曰く，「超選択則」と呼ばれる保存量が存在する「例外的状況」では，陽子と中性子の状態の重ね合わせが意味をもたないように，量子論のもっとも基本的な原理の一つであるはずの「重ね合わせの原理」の適用に「制限」がつき，「コヒーレントな部分空間」と呼ばれる表現空間の直和成分の中でだけ意味をもつ，と．

2　量子古典対応とミクロ・マクロ双対性

2.1　「凝縮状態」とは?：量子古典対応・セクター概念との論理的つながり

状態ベクトルの「重ね合わせ」＝線型代数できれいに取り仕切られた「ミクロ世界の中だけを見る(?)」ことに慣れてしまうと，《「重ね合わせの原理」が成り立つのが「正常」で，破れるのは「病的例外」》という判断に傾くのは，ある意味「自然」かも知れない．しかし，我々の目に直接見えないミクロ世界を正確に記述するはずの「理論」も，元はと言えば眼で見える現象，実験・観測結果から「帰納」的に導き出されたものではなかったか？ メソスコピック物理やナノ物理，超微細加工技術，量子光学・光通信技術等々，今日 quantum physics と総称される量子論の新しい諸分野は言うまでもなく，元々の量子統計力学，物性論，場の量子論でも，この「見える」古典的マクロと「見えない」量子的ミクロとがどうつながっているか，その相互関係の解明こそ，物理学の「真骨頂」・「醍醐味」だったのではなかろうか？ 以下に

見るように,「状態の重ね合わせ（＝線型原理）を無効にする超選択則」なる状況を詳しく検討すると，実は，互いに「無縁 disjoint」な表現である複数の「**セクター**」(＝「コヒーレントな部分空間」) をもたらす「病的状況」にこそ，ミクロとマクロの相互関係・移行関係の整合的理解のカギが隠されていることがわかる：数学的文脈で定義された「セクター」の一つ一つを識別しそれらに「物理的な名前」を与える「秩序変数」を見直せば，それは「非粒子的モード」＝「多粒子の集団運動に基づく凝縮状態」の働きにほかならない．たとえば，BCS 超伝導理論なら,「非粒子的モード = Cooper 対」が凝縮した状態が超伝導状態であり，対応する「秩序変数」とは Cooper 対の「位相」にほかならない．

2.2 セクターの拡張概念とそれに基づく量子古典境界

「量子古典対応」に含まれる積極的内容を甦らせ，ミクロとマクロの相互関係の議論において有効な方法論として役立たせるには，それに相応しい数学的定式化を与えることが不可欠だが，ちょうどそれが「ミクロ・マクロ双対性」によって供給されるというのがここでの基本的主張である [5]．それをなるべくわかりやすい形で説明するため,「物理量の代数」とその上の一般的な「状態」，それに対応する「表現」の概念が必要になる．ここで代数とその表現に関する一般論を展開する余裕はないが，要点だけは押えておこう [6].

通常の量子力学理論の構成は，最初に状態ベクトルのなすヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ を一つ決めて，$\mathfrak{H}$ 上のエルミートな線型演算子がすべて（可能的に）物理量であるとの見方を基本に組み立てられる．したがって，物理量全体は $\mathfrak{H}$ 上既約に表現され，どんな状態ベクトルの重ね合わせ $\psi = \psi_1 + \psi_2$ も純粋状態 $\psi/\|\psi\|$ を表すから，重ね合わされた状態ベクトル ψ_1, ψ_2 相互をつなぐ非対角要素 $\langle\psi_1|A\psi_2\rangle \neq 0$ をもつ物理量 A が常に存在して量子干渉の現象が起きる．これに対して，量子場のような「**無限自由度**」の物理系は置かれた「状

況」・「境界条件」に応じて全く異なった多様な実現形態をもつのだが，有限自由度系を扱う量子力学の処方箋どおり，状態ベクトルのヒルベルト空間を決め，というやり方を踏襲すると，物理量の特定の表現が選ばれてしまい，身動きが取れなくなる．群の表現論で，特定の一つの表現ではなく多様な表現を統一的に扱うには，「表現される前」の抽象的な群の定義が不可欠なことを思い出すと，対象とする物理系を特徴づける特定の物理量をひとまとめにし，個々の状況でそれらの量が取る具体的振舞いの記述だけではなく，それらに共通する基本的な代数構造をまず抽象的な (C*-) 代数 $\mathcal{A}$ として取り出すことが重要になる(「初めに代数ありき」)．そのような抽象代数 $\mathcal{A}$ の元として見た物理量を特定の実験状況で測定すれば，各物理量 $A \in \mathcal{A}$ ごとにその期待値 $\langle A \rangle$ を対応させることによって，その状況に固有な「状態」ω を「期待値汎函数」 $\omega : \mathcal{A} \ni A \longmapsto \omega(A) := \langle A \rangle \in \mathbb{C}$ として同定することができる．つまり，条件

i) $\omega(\alpha A + \beta B) = \alpha\omega(A) + \beta\omega(B)$,

ii) $\omega(A^*A) \geq 0$,

iii) $\omega(\mathbf{1}) = 1$,

で指定された代数 $\mathcal{A}$ 上の正値線型汎函数 ω を一般的な意味での「状態」として定義し，その全体 $E_{\mathcal{A}}$ を「状態空間」と呼ぶ．状態 $\omega \in E_{\mathcal{A}}$ を決めれば，$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (A, B) \longmapsto \langle A, B \rangle = \omega(A^*B) \in \mathbb{C}$ という形で $\mathcal{A}$ には内積「もどき」が定まる．文字どおりのヒルベルト空間の内積にするには「エルミート形式」$\langle A, B \rangle$ が非退化になるようノルムゼロの分 $\mathfrak{I}_\omega := \{A \in \mathcal{A} : \omega(A^*A) = 0\}$ だけ割算した $\mathcal{A}/\mathfrak{I}_\omega$ を正値性 $\omega(A^*A) \geq 0$ の条件下に完備化してヒルベルト空間 $\mathfrak{H}_\omega := \overline{\mathcal{A}/\mathfrak{I}_\omega}$ を作ればよい．この中で $\mathcal{A}$ の各元 A は $\mathfrak{H}_\omega$ 上の線型演算子 $\pi_\omega(A)[B] := [AB]$，ただし，$[B] := B + \mathfrak{I}_\omega$, として表現され：

$$\pi_\omega(AB) = \pi_\omega(A)\pi_\omega(B), \quad \pi_\omega(A)^* = \pi_\omega(A^*), \quad \pi_\omega(1) = 1_{\mathfrak{H}_\omega},$$

$$\pi_\omega(\alpha A + \beta B) = \alpha\pi_\omega(A) + \beta\pi_\omega(B) \quad (A, B \in \mathcal{A},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}),$$

$\Psi_\omega := [I]$ (I : 単位元) は関係式

$$\omega(A) = \langle \Psi_\omega, \pi_\omega(A)\Psi_\omega \rangle, \qquad \overline{\pi_\omega(\mathcal{A})\Psi_\omega} = \mathfrak{H}_\omega$$

を満たす. 代数 $\mathcal{A}$ の状態 ω からこのようにして構成された表現 $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Psi_\omega)$ を $\mathcal{A}$ の Gel'fand-Naimark-Segal 表現（略して GNS 表現）と呼ぶ [7]. $\mathcal{A}$ の勝手な表現 $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathfrak{H})$ [: 代数的*-準同型] はこれと等価な表現（巡回表現と呼ばれる）に直和分解でき，また状態概念という操作的文脈とのつながりが明示されていることは物理の議論に都合がよい. 物理現象は, [物理量 A の集まりからなる代数 $\mathcal{A}$, ヒルベルト空間上の線型演算子による $\mathcal{A}$ の表現 $\pi : \mathcal{A} \ni A \longmapsto \pi(A) \in B(\mathfrak{H})$, $\mathcal{A}$ 上の物理的状態 $\omega : \mathcal{A} \ni A \longmapsto \omega(A) \in \mathbb{C}$] を基本語彙として，内部・外部の時空構造（: 内部自由度は電荷や質量等，場・粒子の種類を識別し，外部時空とは通常の時空概念に基づく物理系・状態の局在状況を表すもの）の変化と共に，物理量 $A \in \mathcal{A}$ and/or 状態 ω がどのように変化するか? という形で記述できることを，経験的に我々は知っている [: それは日常の文章表現における “5W1H” の数学的抽象化・一般化にほかならない] .

この前提で次になすべきことは，**ミクロ量子系とマクロ古典系の間の「境目」**を同定する作業である. 紫外発散の原因を「長さの次元をもつ自然定数の欠如」に求めた Heisenberg の有名な言葉によってよく知られているように，量子論には物理現象における「量子性」と「古典性」の現れ方について，両者の間の固定された「境目」（いわゆる “Heisenberg 切断”）を特徴づけるような**固有の長さのスケールがない**. このため，その「境目」は着目する現象に固有な複数のスケールの間の相互関係に応じて如何ようにでも動くため，「巨視的量子効果」というような現象も可能になる. そういう意味で，完全な「普遍妥当性」をもった「量子・古典境界」は存在しないが，記述対象の領域・記述精度・記述さるべき側面を限定した物理現象の現実的記述という場面ご

とに意味をもつ「境界」は存在し，数学的に正確な定義が可能である．

このために，超選択的セクターの概念を振り返っておこう．既述のように，元々それは，量子論の理論構成における本質的な「原理」の一つと見做された「重ね合わせの原理」の適用に制限をもたらす「例外」状況として認識されてきたものである．すなわち，ψ_1, ψ_2 が量子状態を記述する状態ベクトル ($\|\psi_i\| = 1$) ならそれらの重ね合わせ $c_1\psi_1 + c_2\psi_2 =: \psi$ も「常に」(i.e., $\forall c_i \in \mathbb{C}$ s.t. $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$) 一つの量子状態を表す，というのが「重ね合わせの原理」．しかるに，$\psi_1 = \psi_e$, $\psi_2 = \psi_P$ が各々電子，陽子の状態ベクトルを表す場合にこれを適用し量子論の標準的解釈に従うと，ψ が記述すべき物理的状況は，確率 $|c_1|^2$ および $|c_2|^2$ で電子，陽子が見出されるが，観測しない限りそれ自身では電子でも陽子でもない状態（いわゆる “Schrödinger の猫状態”）だという理解になる．しかし，電子・陽子は古典的に区別可能（たとえば，重粒子数・軽粒子数，電荷，質量等によって）で，こんな「ネコ状態」を想定しても現実には意味がないから，「まずい」原因は重ね合わせの原理を適用したことだ，というふうに解釈された．この状況下で重ね合わせの原理を適用してよい状態ベクトルの作る部分空間のことを “超選択的セクター”（または “コヒーレント部分空間”）と呼び，重ね合わせ原理の適用「制限」それ自体を「超選択則」と呼ぶようになった．

本来ならば，議論の対象とする物理系を特徴づける際，その系について「何が物理的に測定可能な量か？」の吟味[3]が不可欠の前提だったはず．ところが，有限自由度系の量子力学から出発して今日広く流布している量子論の「標準的」定式化では，最初に選んだ状態ベクトル空間 $\mathfrak{H}$ 上の（スペクトル分解可能な）線型演算子のすべてを（無前提に！）物理量だと「定義」して，この重要な物理的問題の答えを，次元以外に個性をもたないヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ に

[3] 「何が物理量か」を具体的に指定しないと理論が作れない，という意味ではない．「具体的」な中味は理論に応じてその都度変わる．重要なのは，状態ベクトル空間の「指定」だけで物理系が自動的に指定されるかのような誤解をただして，物理量の代数と状態との pairing = 双対的関係という理論の要素を正しく扱う，という問題である．

委ねてしまう．それに由来する理論的欠陥の一つが，出発点で最重要視したはずの「重ね合わせ」原理を「超選択則」に対して適用除外にするという非論理的な「彌縫（びぼう）策」として現れ，ミクロとマクロの整合的理解につまづく結果をもたらした．

しかし「標準的」定式化にこだわらず，より一般的な代数的定式化を基本にすれば，別に $c_1\psi_e + c_2\psi_P$ というような「状態ベクトル」の扱いを「禁止」する理由は何もない．電子・陽子が古典的に区別可能ということが意味するのは，単にその両者の間の状態遷移を引き起こす測定可能な物理量がないというだけで，任意の物理的観測量 A は

$$A \longmapsto \pi(A) = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_e & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & A_P & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ (e \\ (P \\ \vdots \end{matrix}$$

という「ブロック対角的」な形で可約に表現され，

$$\begin{aligned} \langle \psi \mid \pi(A)\psi \rangle &= |c_1|^2 \langle \psi_e \mid A_e\psi_e \rangle + |c_2|^2 \langle \psi_P \mid A_P\psi_P \rangle \\ &= \mathrm{Tr}\,(|c_1|^2 \mid \psi_e\rangle\langle\psi_e \mid A_e + |c_2|^2 \mid \psi_P\rangle\langle\psi_P \mid A_P) \\ &= \mathrm{Tr}\,\rho_\psi \pi(A) \end{aligned}$$

となる．つまり，状態ベクトル $c_1\psi_e + c_2\psi_P$ の「重ね合わせ」は見掛けだけで，実際には密度演算子

$$\rho_\psi = |c_1|^2 \mid \psi_e\rangle\langle\psi_e \mid + |c_2|^2 \mid \psi_P\rangle\langle\psi_P \mid$$

で与えられた「干渉効果」なしの混合状態と等価であり，観測の如何によらず電子・陽子が見つかる確率が各々 $|c_1|^2$，$|c_2|^2$ で与えられる統計的混合を表

す，ということに「過ぎない」．さらに詳しく考察すると，上の物理量の「ブロック」構造より，電子と陽子の区別を可能にする適当な物理量 C （重粒子数・軽粒子数，電荷，質量の函数 $C = F(n_B, n_l, e, m)$ で次を満たすもの）の存在が従う：

$$C\psi_e = F(0,1,-1,m_e)\psi_e, \quad C\psi_P = F(1,0,1,m_P)\psi_P,$$
$$F(0,1,-1,m_e) \neq F(1,0,1,m_P).$$

「同時対角化」に対応して，C はそれ自身物理量であると同時にすべての物理量 $\pi(A)$ と交換可能 $[C, \pi(A)] = 0$ で，物理量の全体 $\mathcal{A}$ の（表現 π の）中心に属する：

$$C \in \mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A}) := \pi(\mathcal{A})'' \cap \pi(\mathcal{A})'.$$

超選択則の一般的本質は，「重ね合わせ原理」の「適用除外」などという姑息な問題ではなく，この非自明な中心の存在，$\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A}) \neq \mathbb{C}\mathbf{1}$, にある．重要なのは単なるユニタリー非同値性ではなく，どんな（ゼロでない）部分表現への制限もユニタリー同値にならないという意味での**表現の「無縁性 (disjointness)」**であり，無縁表現の出現と非自明な中心＝マクロ物理量の存在とは数学的に同値．すなわち，[無縁表現の出現] $\Longleftrightarrow$ [非自明な中心＝マクロ物理量の存在] $\Longleftrightarrow$ [超選択則の出現]，ということである．(既約表現について，**無縁性**と通常のユニタリー非同値性は同じ.)

要約すると，超選択則とは，自由度が無限になると必ず出現する無縁表現に伴う非自明な中心＝マクロ物理量＝秩序変数 (order parameter) の存在，すなわち,「**ミクロ・マクロ共存系**」の登場ということであり，そこでの（超選択）セクターとは，その中心を「同時対角化」（＝中心分解）して得られる「最小単位」の表現（または，その表現空間）にほかならない．超選択則が提起された歴史的文脈から，従来この「最小単位」は既約表現と同一視されて

きたが，代数的量子場理論の展開と共に，有界時空領域 $\mathcal{O}$ 上の局所環 $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ や温度平衡状態における表現代数等，III 型 von Neumann 環が至る所に登場し，その既約分解に一意性がないことがわかると，分解の「最小単位」（正確には，極小単位）は既約表現・純粋状態ではなく，中心が自明（$\mathbb{C}\mathbf{1}$）な因子表現・因子状態として理解することが重要になる．物理的には，これは秩序変数が同一の定まった値をもつ状態の族＝「純粋相」(pure phase)，にほかならない [8, 9]．既約表現と「閉じた物理系」との対応という伝統的イメージを考慮すると，既約表現が意味を失うという「否定的」帰結は，《どんな物理系も完全に周囲から切り離して閉じた系として扱うことは厳密には不可能！》というごく当たり前の現実に対応する．こうして，中心＝秩序変数は，その実現値によってセクター＝ 純粋相の一つ一つを識別する役割を担うマクロ物理量になる．

既約表現がユニタリー同値関係に基づいて表現を分類するときの最小単位であったのに対して，**因子表現**＝［**自明な中心をもつ**表現］を最小単位とする物理量の代数 $\mathcal{A}$ の表現の分類には，**準同値**性 (quasi-equivalence)，すなわち，**重複度** (multiplicity) **を無視した表現の同値**関係 $\pi_1 \approx \pi_2$ [= unitary equivalence up to multiplicity] を採ればよい [7]．これは，物理量の代数 $\mathcal{A}$ の表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ が生成する von Neumann 環 $\pi(\mathcal{A})''$ の同型性，

$$\pi_1 \approx \pi_2 \Longleftrightarrow \pi_1(\mathcal{A})'' \simeq \pi_2(\mathcal{A})''$$

と等価である．ただし，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ 上の有界線型演算子の代数 $B(\mathfrak{H})$ の部分集合 $S \subset B(\mathfrak{H})$ に対して

$$S' := \{B \in B(\mathfrak{H})\,;\, AB = BA \text{ for } \forall A \in S\}$$

を S の可換子環と呼び，$\pi(\mathcal{A})''$ は $\pi(\mathcal{A})$ の二重可換子環 $(\pi(\mathcal{A})')'$ で，弱位相によるその閉包に等しい．

定義により因子でない表現は非自明な中心をもつが，それは可換環として「同時対角化可能」で，それによって因子の直和にまで一意分解可能だから，この分類での最小単位は確かに因子**表現**＝[**中心自明**な表現] になる[4]．任意の二つの因子表現 π_1, π_2 は準同値でなければ無縁：

$$\pi_1 \overset{|}{\circ} \pi_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\pi_1, \pi_2) := \{T : \mathfrak{H}_{\pi_1} \to \mathfrak{H}_{\pi_2} ; T\pi_1(A) = \pi_2(A)T\} = 0$$

で，慣用される「ユニタリー非同値性」という言葉は，正確には準同値性の裏返しである無縁性として理解すべきであり，[ユニタリー同値か非同値か] よりも，[準同値か無縁か] の視点の方が表現の中味の異同をより適切に分類できることになる．これは既約分解が一般に非可換な可換子環 $\pi(\mathcal{A})'$ の対角化を要求し，そのため一意性が保証されないのと大きな違いで，広い文脈ではむしろ既約表現 = type I とそこへの既約分解の方が例外的状況である．たとえば同一の既約表現 π を反復した直和表現

$$n\pi := \overbrace{\pi \oplus \cdots \oplus \pi}^{n}$$

は，その重複度 n によらず定義からすべて準同値だが，ユニタリー同値性は重複度の違いだけで簡単に崩れてしまう：$n\pi \not\cong m\pi$ $(n \neq m)$，等々.

代数 $\mathcal{C}$ の可換性が $\mathcal{C}$ 自身とその中心 $\mathfrak{Z}(\mathcal{C})$ との一致，$\mathfrak{Z}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$，で特徴づけられるのと対比すれば，中心自明 $\mathfrak{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}\mathbf{1}$ の条件で定義された因子環 $\mathcal{M}$ は，古典性＝可換性の対極にある量子的一体性を（既約性が意味を失うような状況まで含めて）一般的に表すものということになる.

このようにして，既約表現に基づく「セクター」概念を，**《セクター＝因子表現》**の形に拡張解釈すれば，混合状態・可約表現の扱いが不可避な熱的状況や局所状態の議論にもそのまま適用できる．特に熱力学・統計力学の文脈で

[4] 正確を期するなら，表現ヒルベルト空間の可分性の仮定の下での話．非可分の場合は，微妙な状況が起きる.

は，この意味の「**セクター**」とそれに付随する状態が「**熱力学的純粋相**」の概念にピッタリ一致し,「純粋相」と「セクター」とは単に物理と数学での名称の違いだけなので，以後この二つの概念は同じものとして扱う．するとこの拡張された「**セクター**」概念によって，**ミクロ・マクロ**，**量子・古典の相互関係**が次のように明快な形に整理される [8, 9]：

1) 純粋相＝単一セクター＝《中心自明な因子表現》は，ミクロ量子系固有の量子的内部構造を記述する．

2) 混合相＝複数セクターの確率的共存：各セクターの内部を記述する《因子表現＝量子的ミクロ》と，異なるセクターにわたる《非自明な中心＝マクロ古典系》とが共存して《**量子・古典複合系**》を形成する．

3) 超選択則＝[中心＝秩序変数からなる古典的マクロレベルの存在]：混合相を形成する互いに無縁なセクター一つ一つは,「同時対角化」された中心＝古典的マクロ変数の「固有値」（＝数学的には「スペクトル」）によって過不足なく識別され，中心は「秩序変数」として機能する．混合相では，セクター相互の無縁性のためセクター間「干渉効果」が消え，セクター間にまたがる状態ベクトルの「重ね合わせ」＝線型結合状態は，統計的混合に帰着する．混合相＝[超選択則の存在]＝[非自明な中心の存在]＝[古典的巨視的な秩序変数が存在する《量子・古典複合系》] という等式が成り立つ．

4) 《**量子古典対応**》＝量子的ミクロから「創発」した古典的マクロとその普遍性：このように，量子的ミクロレベル＝[セクター内部の量子論的非可換世界] と古典的マクロレベル＝[セクター間の関係を記述する中心の古典的マクロ変数] とが,「**セクター**」**を「境目」として**明解に切り分けられると同時に，両者の有機的つながり＝《ミクロ・マクロ対応》が次のように理解される：

a) マクロ → ミクロ＝《古典的マクロレベルの普遍性》：量子的ミクロのセクター一つ一つは（その内部構造に立ち入らない限り）古典的マクロレベルの秩序変数の値によって一義的に指定される；

b) ミクロ → マクロの「創発」: 最初から可換なマクロ古典量を持ち込むのでなければ，理論に現れるマクロ可換量はすべて，ミクロとマクロの「境目」に生成した無縁表現に伴う非自明な中心＝秩序変数に由来する．それらは無限個のミクロ量子が「凝縮」した極限でのみ実現し，《無限個の量子の凝縮集積効果としての古典的マクロ》という直観的標語の形で理解されてきた「量子古典対応」の物理的内容に，正確な数学的定式化が与えられる．

このように理解された「量子古典対応」から出発すれば，種々のレベル・形においてその一般化された数学的形態として《ミクロ・マクロ双対性》[5] が成立し，それによってミクロとマクロが有機的に結ばれると同時に，古典的マクロレベルの演ずる普遍的役割が自然に定式化され，理解可能になる [9, 10, 11]．ミクロ量子とマクロ古典の関係を自然に説明する超選択則が，「奇妙な例外」的状況として物理屋の目に映った理由を改めて振り返ると，やはり，状態ベクトルのヒルベルト空間から出発する量子力学の標準的定式化が，「測定可能な物理量は何か？ それはどんな数学的表現をもつか？」という問いを忘れ，「すべてのエルミート（正確には，自己共役）演算子」が測定可能との「思い込み」によって，《ベトクル状態＝純粋状態／密度行列＝混合状態》との迷信を蔓延（まんえん）させてきたせいだと言わざるを得ない．Stone-von Neumann 一意性定理 = Dirac 変換理論の成り立つ有限自由度量子系の楽園では，この「思い込み」で不都合はなかったが，無限自由度の荒海に乗り出した途端，無縁表現の洪水と共にトレースをもたない III 型 von Neumann 環が登場し，ヒルベルト空間＋重ね合わせの原理＋ Dirac 変換理論の描像は破綻し，互いに dual な関係にある物理量の代数 $\mathcal{A}$ とその上の状態 ω とを両方同時に入替え可能なものとして取扱う視点が本質的役割を演ずることになるのである．

2.3 有限自由度 vs. 無限自由度

無限自由度量子系としての量子場には，種々の「非同値性」(正確には無縁性) 絡みの「困難」が不可避に伴い，物理屋を悩ませてきた [12] が，無縁性と中心＝秩序変数の相互関係を基軸にミクロとマクロを捉える上述のセクターの視点から見直せば，逆にその自然な物理的意味が見えてくる [11]：たとえば，

i) 相互作用の有無やその形に応じて物理系を記述する物理量の代数が異なり (たとえば Haag の定理)，

ii) 相互作用をもたない自由場がすでに連続無限個の無縁表現 (たとえば，質量の異なる場) をもつ，

iii) 同じ代数で記述された同一の物理系でも，真空か熱的状況か，熱平衡か非平衡かに応じて，あるいは熱平衡でも温度ごとに表現は無縁，

iv) さらに物理系を特徴づける対称性のあり方——破れのない対称性・自発的に破れた対称性・明示的に破れた対称性——に応じて表現は無縁で [13]，その移り変わりを温度や外場の変化と共に追跡すれば，相転移・臨界現象の記述になる，等々.

多くの場合，無縁性絡みの数学的「困難」が「ミクロ・マクロ，量子古典対応」の文脈でもつ積極的・物理的な意義は見失われ，数学的「病理現象」の扱いで本来の物理的文脈からは切り離されてきた．上述の《無限個の量子の凝縮集積効果としての巨視的古典レベルの成立》という「**量子古典対応**」が示唆する深い概念的・一般的本質 [10] が比喩的理解の域を出ず，正確な数学的定式化の下にその現実的運用を可能にするような数学的考察・技法展開が永らくなされてこなかったのも，無限自由度量子系を扱う合理的手法の未発達による不可避の帰結であろう．しかし本来，こういう状況が意味するのは，

ミクロ量子系とそれを取り巻くマクロ古典系のさまざまな相互関係・配置に応じて物理現象の現れ方が驚くべき多様さをもって変化することであり，そうしたさまざまな現れ方を通じて**ミクロ系・マクロ系相互のつながり方・相互移行の仕方が，セクターに伴う古典的秩序変数を通してマクロレベルで可視化される**，ということにほかならない．上のようなセクター概念に基づく「ミクロ・マクロ，量子古典対応」の統一的スキームを採れば視界は一変し，互いに無縁なセクターの存在はもはや「理論的困難」ではない．異なるセクター間で，その無縁な表現を相互に移り変わらせることはできないが，対応する期待値汎函数としての状態は「パラメータ変動」で自由に動くので，移動先に着地した後 GNS 構成で表現を再構成すればよいのである．無限自由度量子系を扱う場の量子論や量子統計力学こそは，このようなミクロ・マクロの相互関係・移行に関わるアクチュアルで動的な諸問題を正面から論ずる舞台となるはずである．

これとは対照的に，有限自由度正準交換関係の代数は Stone-von Neumann 一意性定理より無縁表現をもたずセクターが一つしかないため，ミクロ量子系からその中心環としてマクロ古典系が emerge する余地はない．無限自由度系の状態 ω が，表現 $(\pi_\omega, \mathfrak{H}_\omega)$ の無縁性に基づき古典的マクロの秩序変数によるセクター識別を可能にする一方，状態のパラメータ変動 ω_α と GNS 再構成 $(\pi_{\omega_\alpha}, \mathfrak{H}_{\omega_\alpha})$ によるセクター間の橋渡しを許す，という形で，異質性と同質性の興味深い統合を見せたのに対して，量子力学では一つの表現とそれに付随する状態がすべてで，後者は Dirac 変換理論のユニタリー変換群の作用で制御される．このような有限自由度系の常識でものを考える限り，そこでのマクロレベルは理論の外から ad hoc ($\overset{??}{=}$ a priori) に手で持ち込むしかない．マクロレベル（の存在とそのあり方）は a priori に前提され，ミクロ・マクロの境界は「固定」されて，当の「境界」が果たす物理的役割，それがどう動くか？ はそこでは視野に入らない．もしマクロ古典系が宇宙開闢(かいびゃく)以

来ずっと，ミクロ量子系とは独立に存在し続けてきたのでなければ，宇宙史のどこかの時点でミクロ量子系から生成されたに違いない．それは無限自由度量子系なしに不可能であり，無限量子の集積効果としての**「マクロ古典世界」の非自明性**と「量子古典対応」の本質が，すでにこの抽象レベルでも確認される．

問題の焦点は，有限自由度と無限自由度の量子系の間に横たわる本質的ギャップであり，その理論的数学的に整合的な取扱いがミクロ量子系とマクロ古典系の間の相互関係・相互移行のナゾを解くカギを握っている．この文脈で量子論における「長さの次元をもつ自然定数の欠如」を見直すと，それは理論の欠陥ではなく，むしろ記述対象である自然の構造とそれを記述する理論の間の整合性を保証する本質的要件だということがわかる：というのは，ミクロ理論からマクロレベルを中心＝秩序変数として導出するには多様な無縁表現の存在が本質的で，そのためには，系の自由度が「無限」でなければならなかった．通常,「有限」と「無限」は数学的に厳密に区別されるものと考えられているが，超準解析的視点に立つと，両者の差異は，実は「スケールの取り方」に応じて変わる effective なものだということがわかる！ そこでの “internal logic” に基づいて「超有限的」自由度を用いれば [14]，有限・無限の区別なくどちらも同じ「統語法」で扱うことができ,「標準部分」の取り方の違いで無縁性を再現するというやり方が可能になる．そして,「有限」・「無限」のこの区別は，記述対象系の複数のスケールおよび記述系のそれとの間の相対的関係に依存して決まる，という意味でスケール依存的なものであり，atomic BEC の「有限系」的性格＝有限サイズ効果の問題は，こういう文脈でこそ面白いものになると考えられるのである．

3　対称性とその破れ

さて，上の問題をもう少し具体的に考えるには，対称性とその破れ，それが時空領域と物理的自由度の大小に応じてどう変化するか？ ということを見ておく必要がある．粗っぽく言えば，局所的には対称性の破れなし／大域的には対称性の保存 vs. その破れ／さらに大きな系 (augmented algebra) に埋め込むと，再び対称性は（形式的に）「回復」する，という状況になっている．そこで，[セクター構造] と [対称性とその破れ] とが [スケール移動] につれて相互にどう絡むか？ という問題を考えよう．この [スケール移動] が実は，有限 vs. 無限，ミクロ vs. マクロと絡んでいる．

3.1　「見えるマクロから見えないミクロへ」＝帰納法の数学的定式化

通常，場の量子論では，理論の出発点でスピンと統計の一般的関係に従うボーズ場・フェルミ場の間の超選択則と大域的ゲージ不変性を前提して話を進める．しかし，「反交換関係」に従うフェルミ場は，物理的作用の光速以上の伝搬を否定する Einstein の因果律に反するため，物理的な観測可能量にはなり得ない．また電磁場以外のほとんどの量子場は大域的ゲージ群の下で非自明な変換性を示すが，そういう一般化された「電荷」をもつ量子場も物理的な観測可能量ではない．したがって，Bose-Fermi 超選択則と大域的ゲージ不変性がどういう根拠で第一原理的に出てくるものかは，実は証明を要する非自明な「仮定」である．一般に量子場は，すべてが直接観測にかかる "observable" ＝「観測可能量」ではなく，量子場の作る非可換代数 $\mathcal{F}$ のうち或る適当な部分環 $\mathcal{A}$ の元だけが物理的測定を通じて「見える」部分を与える．量子場 $\mathcal{F}$ が群 G の作用 $\tau : G \curvearrowright \mathcal{F}$ で規定された内部対称性をもつ状況では，測定可能な物理量 $\mathcal{A}$ はこの G の作用で不変な固定部分環

$$\mathcal{A} = \mathcal{F}^G (:= \{F \in \mathcal{F}\,;\, \tau_g(F) = F \text{ for } \forall g \in G\})$$

として与えられる．面白いことに，［G-不変な観測可能量の作る代数 $\mathcal{A} = \mathcal{F}^G$ の測定値として得られるマクロデータ］vs.［群 G が作用する量子場の代数 $\mathcal{F}$ で記述されるミクロ量子系］という数学的に明確な形をとって現れたこの問題には，［マクロからミクロへの帰納過程］の理論的アプローチを可能にする数学的メカニズムが潜んでいる！——それが Doplicher-Haag-Roberts (DHR) [15] および Doplicher-Roberts (DR) [16] によるセクター理論（DHR 理論と略称）の重要な本質の一つであり，フェルミ場および対称性が破れない場合に内部対称性の起源を説明する．そこではフェルミ場の存在をいっさい仮定せず，対称性変換の下で不変（i.e., 一般化された「電荷」ゼロ！）なボーズ場だけが測定可能な物理量だという前提から出発して，フェルミ場の存在および或るコンパクト Lie 群 G で与えられる大域的ゲージ変換の下での内部対称性の存在が数学的に導かれる．すなわち，$\mathcal{A}$ のどういう表現が物理的世界に現れるか？ というデータがわかれば，対称性の群 G について予め知らなくても，G 自身とそれによって非自明に変換される代数 $\mathcal{F}$ との両方を構成して，$\mathcal{A} = \mathcal{F}^G$ と $G = \{g \in Aut(\mathcal{F})\,;\, \tau_g(A) = A \text{ for } \forall A \in \mathcal{A}\} =: Gal(\mathcal{F}/\mathcal{A})$: $\mathcal{F}$ の中で $\mathcal{A}$ を固定するガロア群，という二つの関係が成り立つようにできる [16].

本家本元のガロア理論が可換体に適用されるのに対して，ここでの $\mathcal{A}, \mathcal{F}$ は非可換環という違いを別にすれば，この $(\mathcal{A}, G, \mathcal{F})$ 3 項にはガロア理論の基本構図がぴったり当てはまる．一見すると，G-不変な観測可能量 $\mathcal{A}$ だけ見て，G がどんな群であるかも，G で非自明に変換される量子場 $\mathcal{F}$ もわかる，というのは，「帰納的推論の数学的扱い」と同じくらい突拍子もない話に聞こえるかも知れない．実際，この 3 項関係は $(\mathcal{A}, G, \mathcal{F})$ のうちいずれか 2 項がわかると残り 1 項が自動的に決まる，という構造なので，$\mathcal{A} = \mathcal{F}^G$ だけを既知として未知の $\mathcal{F}, G$ 両方を知りたい，という我々の望みがそのままか

なうわけではない．$\mathcal{F}, G$ を決めるには，当然もう1項データが必要になる（これはガロア理論とて同じ：係数体 $\mathcal{A}$ だけ与えても話は始まらず，方程式が与えられてはじめてそのガロア拡大 $\mathcal{F}$ とガロア群 G が定まる！）．欠けていたこの1項を補うのは

[物理的に意味のある $\mathcal{A}$ 上の**状態は何か？ を決める情報]**

である．論理上 $\mathcal{A}$ だけで不足なのは当然だが，その付加情報が《$\mathcal{A}$ 上の状態の或る集まり》という形で**観測可能量の代数** $\mathcal{A}$ **の言葉で書き切れる**点は，経験事実と理論をつなぐ文脈で本質的に重要である．《$\mathcal{A}$ のどういう表現を選び出して考察するか?》を定めるこの「選択基準」[15] が次節で触れる **DHR** 選択基準で，経験的・実験的事実と理論との間の重要な橋渡しの役割をする．すなわち，

「方程式」を書下すのに必要な既知の係数環として観測可能量 $\mathcal{A}$ を採り／
「選択基準」を $\mathcal{A}$-係数の「方程式」と見做し／
それによって指定される $\mathcal{A}$ の表現の集まりをその「方程式の解」，

と解釈すると，上の結論が決して不自然な話ではないことがわかる．「方程式」としての DHR 選択基準を「解い」て得られる「解の集まり」は $\mathcal{A}$ の「セクター」の集まりを記述するが，同時にそれらが作る代数構造は「群双対」$\hat{G}$，すなわち或る（コンパクト Lie）群 G の既約ユニタリー表現全体の構造を定める．そこから（淡中-Krein の）「群双対性定理」を通じて対称性の群 G が決まり，$\hat{G}$ の知識から「接合積」 $\mathcal{F}=\mathcal{A}\rtimes\hat{G}$ の方法で，量子場の代数 $\mathcal{F}$ を $\mathcal{A}$ の**ガロア拡大として**再構成することが可能になる．こうして，量子場の代数 $\mathcal{F}$ は「解」が添加されたガロア拡大として，内部対称性の群 G はガロア群 $Gal(\mathcal{F}/\mathcal{A})$ として意味づけられることになる．

観測可能量 $\mathcal{A}$ とその上の量子状態としての「セクター」は，測定過程を通してマクロレベルから「見える」量で，このマクロデータがわかれば，内部対称性を記述する群 G と「直接見えない」部分まで含めた量子場の代数 $\mathcal{F}$

という理論のミクロ構造がそれから決まる，というのが DHR 理論の主張だから，これはマクロ $\rightarrow$ ミクロ帰納法の一つの数学的実現を与える.「天才の閃きによる帰納的推理」，つまり「明示的な」理論の形に書き表せない直観的発見法で見つかったミクロの素粒子世界を支配する内部対称性の構造も，素粒子の散乱過程等に関わるマクロな観測データに数学的理論としての DHR 理論を適用すれば，理論的・数学的に導出可能だったはず，ということになる．したがって，[正確な理論的記述と数学的推論が可能なのはミクロの理論的仮定からマクロを演繹する過程だけで，逆向きの帰納過程を数学的に扱うことは不可能]，という広く流布している考えには根拠がなく，マクロからミクロへ向かう帰納的推論もその重要な部分は理論的扱いが可能だということである.

とはいえ，現実の歴史では大がかりな数学的理論装置なしに「天才の閃き」がちゃんと機能して「正しい」対称性を見つけてしまったのだから，たとえミクロの内部対称性の起源がマクロ構造から DHR 理論でうまく説明されたとしても，それはただ既知の結果を後追いするだけではないか？ という疑問は残る．既知の事実については確かにそのとおりだろう．しかし未知の問題，今後の理論展開のための「方法論」という視点からは全く違った視界が開ける．その考察のために重要なのは次の認識である： この例でのミクロレベルの《量子場＋内部対称性：$\mathcal{F} \curvearrowleft G$》は，双対性を通じて《観測可能量の代数 $\mathcal{A} = \mathcal{F}^G$＋その「セクター構造」$\hat{G}$》という「マクロデータ」と数学的に等価《$[G \curvearrowright \mathcal{F} = \mathcal{A} \rtimes \hat{G}] \rightleftarrows [\mathcal{A} = \mathcal{F}^G \curvearrowleft \hat{G}]$》であり，**同一のマクロデータを与えるミクロモデルは他にいくらも存在し得る**が，**「セクター構造」の記述に関する限りそれらすべては等価**で区別する必要がなく，共通部分は上のようにガロア拡大として特徴づけられた「非可換力学系」$\mathcal{F} \curvearrowleft G$ で “universal” に記述される．つまり，「森羅万象すべてを記述するただ一つの窮極理論」というファウスト的願望をいったん断念し，特定のスケール領域ごとに特定の

現象群の限られた側面を限られた精度で記述する理論を考える，という現実的視点に立てば（上の場合は，$\mathcal{A}$ の「セクター構造」への視点限定），**その範囲内で普遍性を満たす記述法がただ一つ**定まる．別の領域での別の現象群・側面に対してはまた一つ，⋯，ということを繰り返し，それらを多様体の局所地図の貼り合わせと類似の仕方でネットワーク的につないで行けば，それによって，同一のマクロデータを与えるミクロモデルの非一意性という理論につきまとう不可避な「制約」（：これは「Duheme-Quine の背理」と呼ばれる普遍的なもの！）の呪縛から「実効的」に脱け出す道があり得ることになる．

こうした意味で DHR 理論は，[マクロからミクロへ] の「帰納」の過程を数学レベルで見るとどうなるか？ に答える興味深い内容をもっている．「選択基準」の役割はそれだけに留まらず，選び出した状態がもつ物理的意味を「**解釈**」する上でも重要な機能を果たす．これまで DHR 理論は，その高度の数学的抽象性ゆえに物理学の領域ではほとんど誰も振り返ろうとしなかったが，きわめて深い数学的構造をもつと同時に，こうした認識の方法論としても重要な本質をもっている．

3.2　対称性の起源としてのセクター構造

DHR および DR セクター理論 [16] のエッセンスを要約するとその要点は次の 4 点にまとめられる：

1. **DHR selection criterion** (for states of physical relevance) & **DR 圏** $\mathcal{T}_{DR}$：これは（真空状況で）物理的に意味のある状態を選び出す選択基準で，状態 $\omega \in E_{\mathcal{A}}$ が DHR 選択基準を満たすとは，対応する GNS 表現 π_ω が空間的遠方で真空表現 π_0 とユニタリー同値になることである．すなわち，有界時空領域 $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ の並進 $\mathcal{O}_a := \mathcal{O} + a \in \mathcal{K}$ $(\forall a \in \mathbb{R}^4)$

ごとにユニタリー演算子 $u_a \in \mathcal{U}(\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_\omega)$ が存在し，$\mathcal{O}_a$ と因果的に独立な任意の時空領域 $\mathcal{O}_1 \in \mathcal{K}$ に対して次が成り立つ：

$$\pi_\omega(A) = u_a \pi_0(A) u_a^* \quad \text{for } \forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1).$$

DHR 選択基準を満たす状態 ω に対しては，$\pi_\omega = \pi_0 \circ \rho$ となる $\mathcal{A}$ の自己準同型 $\rho \in End(\mathcal{A})$ の存在が証明されるので，そのような $\rho \in End(\mathcal{A})$ を対象とする $End(\mathcal{A})$ の部分圏[5] $\mathcal{T}_{DR}$ を **DR 圏**と呼ぶ．

2. **淡中-Krein 双対性**による群 G の同定： $\mathcal{T}_{DR} \simeq Rep_G \iff G := End_\otimes(V)$. ただし $End_\otimes(V)$ は，ヒルベルト空間とその間の有界作用素が作る圏 $Hilb$ の中に DR 圏 $\mathcal{T}_{DR}$ を埋め込むテンソル関手 $V : \mathcal{T}_{DR} \hookrightarrow Hilb$ から V 自身へのユニタリーな自然変換 $g = (g_\rho)_{\rho \in \mathcal{T}_{DR}} : V \dot{\rightarrow} V$,

$$\begin{array}{cccc} \rho_1 & V_{\rho_1} & \xrightarrow{g_{\rho_1}} & V_{\rho_1} \\ T\downarrow & T\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow T \\ \rho_2 & V_{\rho_2} & \xrightarrow{g_{\rho_2}} & V_{\rho_2} \end{array}$$

が作る群で，V の像がちょうど，コンパクト Lie 群 $G \subset SU(d)$ の有限次元ユニタリー表現 (γ, V_γ) が作る圏 Rep_G に一致する．次元 d は $\mathcal{T}_{DR}$ を生成する $\rho_0 \in \mathcal{T}_{DR}$ から自然に定まり，G の基本表現 γ_0 の次元に一致する．

ここが D(H)R 理論の要所！： 淡中-Krein 双対性とは，可換群 Γ に対する Fourier-Pontryagin 双対性 $\Gamma \simeq \hat{\hat{\Gamma}}$ の非可換な拡張版で，上の結果はそれを非可換 C*-環 $\mathcal{A}$ 上に定義された抽象的な DR 圏 $\mathcal{T}_{DR}$ に結びつけるもの．直和 $\pi_{\gamma_1} \oplus \pi_{\gamma_2}$ とテンソル積 $\pi_{\gamma_1} \otimes \pi_{\gamma_2}$ に関する代数

---

[5] 圏 (category) とは，「対象」の集まり，対象間の「射」，射の結合的合成演算が定義され，集合と集合の集まりとしての「領域」をも含むような代数的構造である．$End(\mathcal{A})$ はその元 ρ を対象，対象 $\rho, \sigma \in End(\mathcal{A})$ に対して関係 $T\rho(A) = \sigma(A)T$ (for $\forall A \in \mathcal{A}$) を満たす $T \in \mathcal{A}$ を ρ から σ への射と見ると圏になる．さらに，合成 $\rho\sigma$ を考える演算（および対応する射の合成）によって $End(\mathcal{A})$ はテンソル圏と呼ばれるものになる．

構造が（コンパクト）群 G の既約表現全体 $\hat{G}$ のなす代数構造 $\gamma_1 \oplus \gamma_2$, $\gamma_1 \otimes \gamma_2$ を決める，という形でミクロ・マクロの対応づけ，$G \longleftrightarrow \hat{G}$, $[\mathcal{F} \curvearrowleft G] \longleftrightarrow [\mathcal{A} \curvearrowleft \hat{G}]$，を与える．

3. **ガロア拡大**による量子場代数の構成法：量子場の代数 $\mathcal{F}$ は，$\mathcal{A}$ と Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ との「接合積」$\mathcal{F} = \mathcal{A} \underset{\mathcal{O}_d^G}{\otimes} \mathcal{O}_d$ として構成され，群 G が $\mathcal{F}$ にガロア群として作用する：$G = Aut_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}) = Gal(\mathcal{F}/\mathcal{A}) := \{\tau \in Aut(\mathcal{F})\,;\, \tau(A) = A \text{ for } \forall A \in \mathcal{A}\} \underset{\tau}{\curvearrowright} \mathcal{F}$．ただし，Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ は

$$\psi_i^* \psi_j = \delta_{ij}\mathbf{1}, \quad \sum_{i=1}^{d} \psi_i \psi_i^* = \mathbf{1}$$

を満たす d 個の等距離写像 ψ_i, $i = 1, 2, \cdots, d$ から生成される単純 C*-環．$\rho_0(A) := \sum_{i=1}^{d} \psi_i A \psi_i^*$ は $\mathcal{O}_d$ または $\mathcal{A}$ の自己準同型を与え，$\{\psi_i\}$ の線型結合全体は

$$\begin{aligned} H_{\rho_0} &:= \{\psi \in \mathcal{F}\,;\, \psi A = \rho_0(A)\psi \text{ for } \forall A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{F}, \\ g(\psi_i) &= \tau_g(\psi_i) = \sum_{j=1}^{d} \psi_j \gamma_0(g)_{ji} \end{aligned}$$

によって量子場の代数 $\mathcal{F}$ に埋め込まれ，G の基本表現 γ_0 を与える有限次元ヒルベルト空間となる．H_{ρ_0} の積 $H_{\rho_0}^n = \overbrace{H_{\rho_0} \cdots H_{\rho_0}}^{n}$ は G のテンソル積表現 $\overbrace{\gamma_0 \otimes \cdots \otimes \gamma_0}^{n}$ を与える（“*Hilbert spaces in an algebra*”!）．

表式 $\mathcal{F} = \mathcal{A} \underset{\mathcal{O}_d^G}{\otimes} \mathcal{O}_d$ の意味は，時空に依存し内部自由度によらない部分 ($\mathcal{A}$) と時空によらず内部対称性の群 G の作用だけを受ける内部自由度の部分 ($\mathcal{O}_d$) とに量子場を分解すること．

4. **セクター構造**：量子場の代数 $\mathcal{F}$ の既約な真空表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ は以下の構造をもつ．まず，上で構成された内部対称性の群 G は，共変性条件

$\pi(\tau_g(F)) = U(g)\pi(F)U(g)^*$ を満たす $\mathfrak{H}$ 上のユニタリー表現 $U: G \to \mathcal{U}(\mathfrak{H})$ によって **unbroken** な大域的対称性（＝第一種ゲージ対称性）を記述する．状態空間 $\mathfrak{H}$ における $\mathcal{F}$ の表現をその部分環 $\mathcal{A}$ に制限すると，出発点の $\mathcal{A}$ の既約真空表現 $(\pi_0, \mathfrak{H}_0)$ は G-不変：

$$\mathfrak{H}_0 = \{\xi \in \mathfrak{H}\,;\, U(g)\xi = \xi \text{ for } \forall g \in G\},$$

かつ $\mathcal{F}$ の作用で巡回的な部分空間 $\overline{\pi(\mathcal{F})\mathfrak{H}_0} = \mathfrak{H}$，として $\mathfrak{H}$ に含まれ，$\mathcal{A}$ の表現 $(\pi\restriction_{\mathcal{A}}, \mathfrak{H})$ は次の直和に既約分解される：

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} (\mathfrak{H}_\gamma \otimes V_\gamma),$$

$$\pi(\mathcal{A}) = \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} (\pi_\gamma(\mathcal{A}) \otimes \mathbf{1}_{V_\gamma}); \quad U(G) = \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} (\mathbf{1}_{\mathfrak{H}_\gamma} \otimes \gamma(G)). \tag{3.1}$$

$(\pi_\gamma, \mathfrak{H}_\gamma)$ はすべて互いに非同値な $\mathcal{A}$ の既約表現（より一般的文脈では無縁な因子表現）として**超選択的セクター**を与え，$\hat{G}$ を G の既約ユニタリー表現の同値類全体からなる「群双対」として，すべての $(\gamma, V_\gamma) \in \hat{G}$ と過不足なく 1 対 1 対応で parametrize される．

DHR 選択基準の物理的意味は，真空から励起された局在化可能な G-charge をもつ物理的状態は，charge の影響が及ばない空間的遠方では真空状態と同じに見える，という非常に自然な要請である．そのようにして，現実世界での測定と直結する観測可能量の代数 $\mathcal{A}$ とその上の自然な状態のクラスを集め，それを $\mathcal{A}$ の表現としての超選択的セクターに分類すれば，ちょうど群 G の既約ユニタリー表現の同値類 $\gamma \in \hat{G}$ をラベルとして各セクターを過不足なく区別することができ，G を対称性の群とする量子場の代数 $\mathcal{F}$ による記述と等価になる．こうして内部対称性 G の「起源」ならびにその下での量子場 $\mathcal{F}$ の振舞いが，「天下り」でなく実験的状況とつながり得る形で説明された．

上の議論をもう少し詳しく追いかければ，G の中には $k^2 = 1$ を満たし $\mathbb{Z}_2 = \{1, k\} \subset G$ となる元が存在して，$\mathcal{F}$ を Bose-Einstein 統計 ($k = 1$) に従う場と Fermi-Dirac 統計 ($k = -1$) に従う場に分解できることも示される [15]．局所反可換性ゆえに Einstein の因果律を破る非物理的な量としてのフェルミ場を理論の冒頭で天下りに持ち込む通常の場の量子論の流儀は，「見えない」内部対称性 G の導入と同様に ad hoc なやり方だが，DHR 理論は，局所可換性を満たし観測可能な local net $\mathcal{O} \longmapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$ だけから出発し，$\mathcal{F}$ のレベルでフェルミ場の存在を示すことによって，標準的アプローチがもつこの概念的不備を解消することができる．それを裏返して「操作主義」の眼で見れば，フェルミ場や（破れない）内部対称性を記述する大域的ゲージ群 G とその下で非自明に振舞う量子場 $\mathcal{F}$ 等は，記述の便宜に役立つ数学的補助概念に「過ぎず」，観測可能量の代数 $\mathcal{A}$ さえあれば（局所ゲージ不変性と対称性の自発的破れが絡まない限り）別になくてもよかった概念ということにもなる！

この場合においても，セクター構造に関して本質的なことは，それが，表現された物理量の von Neumann 環 $\pi(\mathcal{A})''$ の**中心の非自明性**と数学的に同値だということ ([9])：

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{A}) &:= \mathfrak{Z}(\pi(\mathcal{A})'') = \pi(\mathcal{A})'' \cap \pi(\mathcal{A})' = \mathfrak{Z}(U(G)'') \\ &= \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} \mathbb{C}(\mathbf{1}_{\mathfrak{H}_\gamma} \otimes \mathbf{1}_{V_\gamma}) = l^\infty(\hat{G}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

式 (3.2) が意味するのは次のことである：元々非可換な量子的側面のみを記述する抽象代数として中心なしで導入された C*-環 $\mathcal{A}$ が，その表現 $(\pi\restriction_{\mathcal{A}}, \mathfrak{H})$ のレベルでは，**マクロな古典的物理量**を表す可換環[6]としての非自明な中心 $\mathfrak{Z}(\pi(\mathcal{A})'') = l^\infty(\hat{G})$ をもち，その各元は $\hat{G} = Spec(\mathfrak{Z}(\pi(\mathcal{A})''))$ 上の函数

[6] 可換 (C*-) 環 $\mathfrak{B}$ の純粋状態と既約表現は区別の必要なく準同型写像 $\chi : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ で表され，このような χ の全体を $Spec(\mathfrak{B}) = M$ と書くと，$\mathfrak{B}$ は連続函数環 $C(M)$ と同型になる (Gel'fand 同型)：$\mathfrak{B} \ni B \longleftrightarrow [\hat{B} : M \ni \chi \longmapsto \hat{B}(\chi) = \chi(B) = \delta_\chi(\hat{B}) \in \mathbb{C}]$.

$(f_\gamma)_{\gamma\in\hat{G}}$ として書ける．そしてこの古典量は G-不変な**秩序変数**として，異なる G-表現を担う各セクターを識別する役割を果たす(G-不変量が異なる G-表現を識別できるのは，Lie 環の Casimir 不変量の場合と同様)．

3.3　対称性の自発的破れと "Augmented Algebra"

数学的には見事な構成をもつ DHR 理論だが，マクロ → ミクロの帰納過程を数学的に実現する上で必要となる方法論的可能性のすべてをそこに求めるのは「ないものねだり」に等しい．たとえば，物理理論として見れば次のような「欠陥」が目につく：i) この理論では対称性の群 G が自動的にユニタリー表現され，G-不変な真空をもつ状況に帰着して対称性の破れが入らない．現実世界ではほとんどの対称性が状況次第で破れ得るから，**対称性の破れ**が扱えなくては「壊れやすいガラス細工」のような理論でしかない．ii)「セクター」=「観測量の既約表現」と定義すると，混合状態の絡む**熱的状況**での対称性は議論の埒外に置かれる．

以下では，凝縮状態の概念と密接なつながりをもつ i) の対称性の破れの扱いを議論しよう．

対称性の自発的破れ（SSB と略称）とは，理論の基本方程式を不変に保つ対称性変換が，真空や熱平衡状態等，理論展開において「基準状態」の役割を演ずる状態を不変に保たない状況を指す．通常，それは量子場の代数 $\mathcal{F}$ の状態 ω が（破れた方向の）無限小の対称性変換 δ の下で不変ではないことを表す関係式

$$\omega(\delta(F)) \neq 0 \quad (\exists F \in \mathcal{F})$$

によって表される．ただしよく検討すると，この式は ω が純粋状態（かもう少し一般的には因子状態）のときは SSB の必要条件であるが，十分性は真空のような空間並進不変状態に対してしか成り立たない．たとえば因子表現であるこ

とを要求しなければ，自発的破れのある状況でも G-不変でない因子状態の G-軌道を G の Haar 測度で平均すれば（少なくともコンパクトな G に対しては）容易に不変性 $\omega(\delta(F))=0$ を回復することができる．逆に，表現空間 $\mathfrak{H}$ の中に G-不変状態をもたない表現 $(\pi,\mathfrak{H})$ でも共変条件 $\pi(\tau_g(F))=U(g)\pi(F)U(g)^*$ を満たす G のユニタリー表現 $G\ni g\longmapsto U(g)\in\mathcal{U}(\mathfrak{H})$ が存在する場合もあるから，何をもって「対称性の破れ」と呼ぶかは慎重な検討を要する [17]．こういう複雑な状況も含め，より一般的な文脈で通用する SSB の「選択基準」は，既述の無縁性と中心の関係を考慮して，次のように与えることができる．

自発的破れの一般的定義 ([9])：

定義 1. 量子場の代数 $\mathcal{F}$ の自己同型群による（局所コンパクト)群 G の（強連続)作用で記述される対称性は，$\mathcal{F}$ の表現 $(\pi,\mathfrak{H})$ においてその中心 $\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{F})=\mathfrak{Z}(\pi(\mathcal{F})'')$ のスペクトル $Spec(\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{F}))$ の各点（正確には，表現 π の中心分解に現れる中心測度 μ に関しほとんど至る所）が G-不変なら，この表現において破れなし，そうでないとき，**自発的に破れている**という．

すなわち，対称性の自発的破れの本質は，群 G のユニタリー**実現**と量子場の代数 $\mathcal{F}$ の**因子表現**の**両立不能性**として一般的に捉えられる．マクロ変数 $=$ **低エネルギーモード**としての秩序変数からなる中心が G の作用で動くというのは，自発的破れを「**赤外不安定性**」と見る物理的描像にちょうどうまく合う．

この定義では，broken, unbroken な部分表現が共存し得るが，$Spec(\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{F}))$ をこれ以上分解できない G-不変な部分領域にまで分割すれば，対応する表現 σ は「中心エルゴード性」で特徴づけられる：すなわち，中心 $\mathfrak{Z}_\sigma(\mathcal{F})$ に属し G-作用で不変な射影演算子は 0 と 1 のみ．それによって任意の表現は，*G-unbroken* 因子表現と G-中心エルゴード的非因子表現（後者が SSB）との

直和に分解され，中心のスペクトル上に「**相図**」が描ける．

これを踏まえると，群 G をもつ対称性が $\mathcal{F}$ の表現空間 $(\pi, \mathfrak{H})$ で破れたとき，それをユニタリー実現するような C*-力学系 $(\mathcal{F} \underset{\tau}{\curvearrowleft} G)$ の「共変的表現」のうちで「最小の」表現を G-中心エルゴード性に基づいて，次のように特徴づけることができる：

1) G の *unbroken* な閉部分群のうちで極大なものを H として，$(\pi, U, \mathfrak{H})$ を C*-力学系 $\mathcal{F} \underset{\tau\restriction_H}{\curvearrowleft} H$ の共変表現：$\pi(\tau_h(F)) = U(h)\pi(F)U(h)^*$ for $\forall h \in H$ とする．このとき，"augmented algebra" $\hat{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \rtimes \widehat{(H\backslash G)}$ [9] を $\mathcal{F}$ と等質空間 $H\backslash G$ から構成される C*-接合積として定義することができ，それは C*-代数 $\mathcal{F}$ をファイバーにもつ代数束 $G \times_H \mathcal{F} \twoheadrightarrow H\backslash G$：

$$\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \rtimes \widehat{(H\backslash G)} = \Gamma(G \times_H \mathcal{F})$$

の断面が（各点ごとの積）に関して作る代数，あるいは，等価な表現として，G 上の H-同変な連続函数 $\hat{F}$：

$$\hat{F}(hg) = \tau_h(\hat{F}(g)) \quad \text{for } \forall g \in G,\, \forall h \in H$$

がなす代数 $C_H(G, \mathcal{F})$ と一致する．$\hat{\mathcal{F}}$ の積構造は

$$(\hat{F}_1\hat{F}_2)(\dot{g}) := \hat{F}_1(\dot{g})\hat{F}_2(\dot{g}), \quad \text{for } \hat{F}_1, \hat{F}_2 \in \hat{\mathcal{F}},\, \dot{g} \in H\backslash G,$$

あるいは，後者の version では

$$(\hat{F}_1\hat{F}_2)(g) := \hat{F}_1(g)\hat{F}_2(g)$$

と書けて，これは H-同変性条件と整合する：

$$(\hat{F}_1\hat{F}_2)(hg) = \hat{F}_1(hg)\hat{F}_2(hg) = \tau_h(\hat{F}_1(g))\tau_h(\hat{F}_2(g)) = \tau_h((\hat{F}_1\hat{F}_2)(g)).$$

$\hat{F} \in \hat{\mathcal{F}}$ に対する G の作用 $\hat{\tau}$ は

$$[\hat{\tau}_g(\hat{F})](\dot{g}_1) = \hat{F}(\dot{g}_1 g),$$

あるいは H-同変函数に対して $[\hat{\tau}_g(\hat{F})](g_1) = \hat{F}(g_1 g)$ で与えられる．H-同変性：$F = \hat{F}(hg) = \tau_h(\hat{F}(g)) = \tau_h(F)$ を考慮すると，この作用の下での $\hat{\mathcal{F}}$ の固定部分環 $\hat{\mathcal{F}}^G$ は定値写像 $\hat{F} : g \longmapsto F \in \hat{\mathcal{F}}^H$ で与えられるから，

$$\hat{\mathcal{F}}^G \cong \mathcal{F}^H.$$

C*-力学系 $\mathcal{F} \underset{\tau\restriction_H}{\curvearrowleft} H$ の表現 $(\pi, U, \mathfrak{H})$ から接合積 $\hat{\mathcal{F}}$ の表現 $(\hat{\pi}, \hat{\mathfrak{H}})$ が次のように誘導される．

2) G/H の（左 G-作用に関する）左不変 Haar 測度を $d\xi$ とすると，ベクトル束 $G \times_H \mathfrak{H}$ の L^2-断面からなるヒルベルト空間 $\hat{\mathfrak{H}}$ が構成され：

$$\hat{\mathfrak{H}} = \int_{\xi \in G/H}^{\oplus} (d\xi)^{1/2} \mathfrak{H} = \Gamma_{L^2}(G \times_H \mathfrak{H}, d\xi),$$

それは $\mathfrak{H}$ に値をもつ G 上の (U, H)-同変函数 ψ,

$$\psi(gh) = U(h^{-1})\psi(g) \quad \text{for } \psi \in \hat{\mathfrak{H}},\ g \in G,\ h \in H,$$

の作る L^2-空間と同一視できる．この $\hat{\mathfrak{H}}$ 上で $\hat{\mathcal{F}}$ および G の表現 $\hat{\pi}, \hat{U}$ をそれぞれ次のように定義でき：

$$(\hat{\pi}(\hat{F})\psi)(g) := \pi(\hat{F}(g^{-1}))(\psi(g)) \quad \text{for } \hat{F} \in \hat{\mathcal{F}}, \psi \in \hat{\mathfrak{H}}, g \in G,$$

$$(\hat{U}(g_1)\psi)(g) := \psi(g_1^{-1} g) \quad \text{for } g, g_1 \in G,$$

これらは次の「共変性条件」を満たす：

$$\hat{\pi}(\hat{\tau}_g(\hat{F})) = \hat{U}(g)\hat{\pi}(\hat{F})\hat{U}(g)^{-1}.$$

3) $\mathcal{F}$ は

$$[\hat{\imath}_{H\backslash G}(F)](g) := \tau_g(F)$$

によって定義される写像 $\hat{\imath}_{H\backslash G} : \mathcal{F} \hookrightarrow \hat{\mathcal{F}}$ によって H-同変条件: $[\hat{\imath}_{H\backslash G}(F)](hg) = \tau_{hg}(F) = \tau_h([\hat{\imath}_{H\backslash G}(F)](g))$ を満たして $\hat{\mathcal{F}}$ の中に埋め込まれる．この埋め込み写像は $\mathcal{F}$ 上の G-作用 τ と $\hat{\mathcal{F}}$ 上の G-作用 $\hat{\tau}$ との間の intertwiner：

$$\hat{\imath}_{H\backslash G} \circ \tau_g = \hat{\tau}_g \circ \hat{\imath}_{H\backslash G} \quad \text{for } \forall g \in G$$

として機能するから，次の関係式が成り立つ：

$$[\hat{\imath}_{H\backslash G}(\mathcal{F})]^G = \hat{\imath}_{H\backslash G}(\mathcal{F}^G) \subset \hat{\imath}_{H\backslash G}(\mathcal{F}^H) = \hat{\mathcal{F}}^G.$$

これまでに出てきた代数とその間の写像の関係は次のようにまとめることができる：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \hat{\mathcal{F}} = \Gamma(G \underset{H}{\times} \mathcal{F}) & & \\
 & {\scriptstyle i_G} \nearrow\swarrow {\scriptstyle \hat{m}_G} & & {\scriptstyle \hat{\imath}_{H\backslash G}} \nwarrow\searrow {\scriptstyle \hat{m}_{H\backslash G}} & \\
\mathcal{F}^H \cong \hat{\imath}_{H\backslash G}(\mathcal{F}^H) = \hat{\mathcal{F}}^G & & \underset{m_H}{\overset{i_H}{\rightleftarrows}} & & \mathcal{F} \\
 & {\scriptstyle i_{G/H}} \nwarrow\searrow {\scriptstyle m_{G/H}} & & {\scriptstyle i_G} \nearrow\swarrow {\scriptstyle m_G} & \\
 & & \mathcal{F}^G & &
\end{array}.$$

ただし，写像 i_G および m_G, 等々はそれぞれ，一つの C*-代数を別の C*-代数に埋め込む写像，および，それとは逆向きに固定点を抽出する「条件付き

期待値」の写像である：

$$m_{G/H} : \mathcal{F}^H \ni B \longmapsto m_{G/H}(B) := \int_{G/H} d\dot{g}\ \tau_g(B) \in \mathcal{F}^G.$$

4) この写像 $\hat{\imath}_{H\backslash G}$ を $\hat{\pi}$ と組み合わせて $\bar{\pi} := \hat{\pi} \circ \hat{\imath}_{H\backslash G}$ と置くと，$\hat{\mathfrak{H}}$ 上に $\mathcal{F} \underset{\tau}{\curvearrowleft} G$ の共変的表現 $(\bar{\pi}, \hat{U}, \hat{\mathfrak{H}})$ が定義される：

$$\begin{aligned}(\bar{\pi}(F)\psi)(g) &:= \pi(\tau_{g^{-1}}(F))\psi(g) \qquad (F \in \mathcal{F},\ \psi \in \hat{\mathfrak{H}}) \\ \bar{\pi}(\tau_g(F)) &= \hat{U}(g)\bar{\pi}(F)\hat{U}(g)^{-1}.\end{aligned}$$

5) この状況でセクター構造は次の関係式から決まる：

命題 2 ([13]). von Neumann 環 $\pi(\mathcal{F})''$ が自明な中心, $\mathfrak{Z}_\pi(\mathcal{F}) = \mathbb{C}\mathbf{1}$, をもつとすると，$\hat{\pi}(\hat{\mathcal{F}})''$ および $\bar{\pi}(\mathcal{F})''$ の中心は次の形になる：

$$\mathfrak{Z}_{\bar{\pi}}(\mathcal{F}) = L^\infty(H\backslash G; d\dot{g}) = \mathfrak{Z}_{\hat{\pi}}(\hat{\mathcal{F}}).$$

中心 $\mathfrak{Z}_{\bar{\pi}}(\mathcal{F})$ のスペクトルとしての等質空間 $H\backslash G$ は G の右作用について遷移的で，それは力学系 $\mathcal{F} \underset{\tau}{\curvearrowleft} G$ の G-中心エルゴード的な表現 $(\bar{\pi}, \hat{\mathfrak{H}})$ から中心上に $\hat{\tau}$ から誘導された変換と一致する．この $H\backslash G$ はいわゆる「縮退真空 (degenerate vacua)」に対応するもので，augmented algebra $\hat{\mathcal{F}}$ は元々の系の量子場の代数と秩序変数との合成系にほかならない．理論全体のセクター構造は，この「縮退真空」$H\backslash G$ の各点ごとに unbroken H のセクター $\hat{H}$ が乗るという形になり，G/H 上のセクター束 $G \times_H \hat{H} \twoheadrightarrow G/H$ で記述されることになる(代数と状態との双対性のため，上の $H\backslash G$ とは逆向きの等質空間 G/H がセクター構造に関与することに注意)．たとえば，$G = SO(3)$： 回転群で $H = SO(2)$ ならば，セクター束 $G \times_H \hat{H} \twoheadrightarrow G/H$

は $SO(3) \times_{SO(2)} \widehat{SO(2)} \twoheadrightarrow SO(3)/SO(2) = S^2$ で，つまり，球面調和函数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ (の index (l, m)) を考えることに対応する．

通常，対称性が自発的に破れることは，対応する変換の生成子が定義できなくなる状況，という形で理解されているが，時空の有界領域の中ではいつでも生成子を考えることが可能であり，また上のように augmented algebra $\hat{\mathcal{F}}$ を作れば，破れた対称性 G の共変表現が作れるのだから,「どのレベルで生成子が定義できなくなるのか?」を明示しないと，意味のない話になってしまう．そして，この augmented algebra $\hat{\mathcal{F}}$ による破れた対称性の議論は，単に数学的抽象的な構成物に終わるのではなく，縮退真空や Goldstone mode の観測・測定の問題を扱う場面で，物理的に重要な役割を果たすことがわかる．

4 「選択基準」＝方程式＝マッチング条件

対称性の破れや熱的状態を視野に入れ拡張されたセクターの視点から明らかになった量子的ミクロ，古典的マクロの基本的な位置づけを踏まえて，次はそれらをどう結びつければよいか? という問題である．この目的に,「セクター」を選び出す「選択基準」を解くべき「方程式」として見るガロア的視点や「群双対性」とガロア拡大等を統合した方法論的視点として《ミクロ・マクロ双対性》[5] が浮かび上がる．それによって，ミクロとマクロが有機的につながり，古典的マクロレベルの演ずる普遍的役割が明らかになる [9, 10, 11]．後者は,「マクロ世界は本当に自明か?」をミクロレベルとのつながりで問い直す設問への一つの答を与え，その普遍性が特定の「適用限界」内でのミクロ理論の一意的妥当性を保証する．こういう視点に立てば，未知の現象を記述・分類・解釈し，それに基づいて対象・過程の制御・フィードバックを扱うための新たな理論的枠組の可能性が以下のような形で示唆される：

A) 相対論的量子場の非平衡局所状態の新しい一般的定式化 [18, 19]

B) 破れない内部対称性に関する DHR-DR セクター理論 [15, 16] とその**再定式化** [9]

C) **自発的に破れた**対称性 (SSB) へのセクター理論の拡張 [9]

D) ミクロ・マクロの統一的枠組 [19, 9]

E) **明示的に破れた**対称性と秩序変数としての温度概念 [13]

F) 測定過程の一般的記述とミクロ系再構成の可能性 [5, 20]

[A) 非平衡 局所状態 : 連続セクター]　　[D) ミクロ・マクロの統一的枠組 : *Inter*-sectorial] → [F) 測定過程と双対性 : *Intra*-sectorial] → ⋯

↓　↘　↑

[B) セクター理論の再定式化 : 離散セクター] → [C) 自発的破れのセクター構造 : 離散 & 連続] → [E) 対称性の明示的破れ] → ⋯

対象の記述・分類・解釈に際して「基準参照系」として機能する（広義の）マクロレベルの設定と共に，扱うべき側面の記述に必要十分な精度で未知の対象系（＝広義のミクロ対象）を捉えるには，どんな「セクター」をどれだけ取り込めばよいか，という問題，つまり，《解くべき「方程式」としての selection criterion》設定が最重要課題になる．その目的にヒントを与えるのが《D) ミクロ・マクロの統一的枠組》である．これは，

（ミクロ）　（マクロ）

i) [q : 対象系の一般的状態] ⟹ ii) [c : 基準参照系とそのセクターの分類空間]

↑

iii) : i) と ii) との比較

⇑　⇓

iv) [**selection criterion** : *c-q channel* ii) ⟹ i)] $\overset{adjunction}{\rightleftarrows}$ [ii) に基づく i) の記述・分類・解釈 : *q-c channel* i) ⟹ ii)]

という形で，ミクロとマクロの関係を統一的に扱うための一般的枠組 [19, 9]

を与え，多様体の扱いや非平衡局所状態の定式化 [18, 19] はその具体例と見ることができる：

例 1. 局所地図 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n)\}$ で記述される多様体 M ：
i) ＝ 局所近傍系 U_λ,
ii) ＝ ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$,
iii) ＝ 局所地図 $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n$,
iv) ＝ ホモロジー，コホモロジー，ホモトピー，K-群，特性類等の幾何学的不変量に基づく M の幾何学的構造の分類と解釈．

例 2. 熱力学的パラメータのゆらぎを伴う一般的熱状態の局所化によって得られる相対論的量子場の非平衡局所状態 [18, 19]：
i) ＝ 局所エネルギー条件 $\omega((\mathbf{1} + H_{\mathcal{O}})^m) < \infty$ で特徴づけられた "1 点 x での" 状態 ω の全体 E_x,
ii) ＝ 熱力学的パラメータ (β, μ) からなる熱力学的相の分類空間 B_K および (β, μ) のゆらぎを記述する B_K 上の確率測度 $\rho \in M_+(B_K) =: Th$ の全体，
iii) ＝ (i) のエネルギー条件で正当化された) "1 点 x での量子場" の集まり $\mathcal{T}_x$ の測定値を比較することにより，未知状態 ω を既知の基準参照状態 $\omega_\rho = \mathcal{C}^*(\rho) = \int_{B_K} d\rho(\beta,\mu)\omega_{\beta,\mu}$ と同一視：$\omega \underset{\mathcal{T}_x}{\equiv} \mathcal{C}^*(\rho)$ すること，
iv) ＝（局所化された熱力学第 0 法則としての）adjunction ＝「マッチング条件」：

$$[E_x/\mathcal{T}_x]\,(\omega, \mathcal{C}^*(\rho)) \overset{q\rightleftarrows c}{\simeq} [Th/\mathcal{C}(\mathcal{T}_x)]\,((\mathcal{C}^*)^{-1}(\omega), \rho).$$

ただし，$\mathcal{C}^*$ は古典的参照系を一般的量子状態へ埋め込む c→q channel で，その（部分的な）逆写像である "$(\mathcal{C}^*)^{-1}$" は q→c channel として，a) 局所的熱状態 ω を基準的状態 $\mathcal{C}^*(\rho)$ と同一視，$\omega \underset{\mathcal{T}_x}{\equiv} \mathcal{C}^*(\rho)$，することを通じて，b) ω に既知の語彙 $\rho \in Th$ に基づく熱的解釈 $\rho \underset{\mathcal{C}^*(\mathcal{T}_x)}{\equiv} (\mathcal{C}^*)^{-1}(\omega)$ を与える，という二重の役割 $[\omega \underset{\mathcal{T}_x}{\equiv} \mathcal{C}^*(\rho)] \rightleftarrows [(\mathcal{C}^*)^{-1}(\omega) \underset{\mathcal{C}^*(\mathcal{T}_x)}{\equiv} \rho]$ を果たす．

この枠組で個々の例を詳しく検討することはそれ自体非常に面白い作業だが，今はその余裕がない．A) 非平衡の概要は上の例 2，B) DHR 理論の一般的帰結は既述，C) 対称性の破れには前節で触れた．詳しい中味は [18, 19, 9] 等，文献に譲り，ここでは，全体に通ずる重要な考え方，概念についての確認に留める．

まず，c→q channel, q→c channel は量子情報理論からの借用語で，channel (＝通信路）とは，量子または古典系の状態を別の系の状態に写す写像の一般的呼称．量子系と古典系との相互関係を論ずる文脈では文字どおり，q は量子，c は古典だが，理論の設定自体にはそういう限定は必要なく，単に q は議論・観測の対象となる（という意味で「未知」の）系，c はその状況で基準参照系として機能すべき（「既知」の）系という区別を意味する．重要なのは adjunction ＝「マッチング条件」である．まず adjunction とは，対象の分類と解釈の問題を扱い始めると必ずお目に掛かる圏論の概念装置で，c→q channel と q→c channel がうまく「バランス」している状況を指し，c→q→c および q→c→q の往復でちょうど元に戻って輪が閉じる場合が本来の「双対性」である．その意味を説明するため，まだ特徴づけができていない「一般的」(generic) 対象 (q) が眼の前に置かれ，それを分類し解釈する作業を考えよう．そのため，すでによく知っている標準的な「見本・標本」(c) をたくさん用意し，着目する文脈に関係のある側面について見本と同じ性質をもつ「未知」対象 (q) は，その性質については見本と同じという割切りをする．これが「比較・分類」であり，「見本・標本」は分類の「指標」・「語彙」，「基準参照系」として機能する．それらは自身では既知の「特殊なもの」だが，未知の「一般的なもの」といつでも自由に比較できる，という意味での “universality” をもつ．たとえば，「時計」それ自身は「特殊な」物理的運動だが，時間的に変化する現象を追うときに事象を時計の針の位置と絶えず universal な仕方で関連づけることを通して「時間」という普遍的「ラベル」が定まる．

この文脈で「選択基準」は，分類作業の対象，選び出すべき状態・セクターのうち今展開しようとする文脈にちょうどピッタリ合うものを必要十分なだけ選び出すための選択基準であり，選び出される対象を「未知数」と見れば，「方程式」として機能することになる．より operational に物理的な「測定」の過程を考えれば，測定対象に対する何らかの「相互作用」が必要で，そこには既知系 (c) から未知系 (q) へ「探索針」を差し込む物理過程が関与するから，それを c→q channel として理解することができる．そのとき，測定対象が返してくる response の過程が q→c channel であり，それによって得られたデータがいつでも意味のある解釈を受けられるよう，適切な「選択基準」と基準系とが設定されていたか否かをチェックするのが「マッチング条件」の検証，ということになる(圏論における抽象的概念としての adjunction も，基本的にはここで述べたような構成をもっている)．それが適切に機能していれば，得られたデータの作る構造（分類空間）を解析することによって，DHR 理論での量子場の代数 $\mathcal{F}$ と内部対称性の群 G の場合のように，記述対象の側面に関して適切な対象系の再構成が実現する．さまざまな種類のこういう分類基準を考え，その相互の関係を解明すれば，自然界のさまざまなスケールに対応した階層領域と，それらを記述する異なる分野の諸理論相互の関係が統一的に理解できるようになるだろう [21].

「選択基準」を「方程式」と見る視点は重要であり，その見方だと，選ばれたセクターはこの方程式の「解」，その解を parametrize し識別するための「座標」はマクロ変数としての中心＝秩序変数で与えられ，記述対象である物理現象・過程を分類し解釈するための universal な「語彙」・「分類空間」を構成する．多くの文脈で，「特殊な」存在としての古典的マクロレベルが普遍的なつながりを通して「あらゆる」量子的対象を指定し，その部分的解釈を与えると同時に，それらを「制御」するという「機能」が見られるのである．さらに，そのセクター構造に働くガロア群がわかれば，元々のミクロ系まで

再構成可能になる．このようにしてガロア方程式論の視点から，自然の物理的記述の一般的本質が見えてくる．これがセクターとガロア理論を軸にして，「量子古典対応」を数学的に捉え直そうという「ミクロ・マクロ双対性」の新しい見方にほかならない [5, 20].

参考文献

[1] たとえば，新井朝雄，『量子現象の数理』，朝倉書店，2006.

[2] von Neumann, J.，『量子力学の数学的基礎』（邦訳），みすず書房，1957.

[3] たとえば，Bogoliubov, N.N., Logunov, Logunov, A.A., and Todorov, I.T.,『場の量子論の数学的方法』（邦訳），東京図書，1969.

[4] たとえば，岩波講座現代物理学の基礎『量子力学』[第 2 版] I, II, 岩波書店，1978.

[5] Ojima, I., Micro-macro duality in quantum physics, pp.143–161 in "Stochastic Analysis: Classical and Quantum — Perspectives of White Noise Theory" ed. by T. Hida, World Scientific (2005) (math-ph/0502038); 小嶋 泉, 量子場の観測過程, 『数理科学』 No.508, 2005.10, pp.18–25; ミクロ・マクロ双対性 — ミクロ量子系をマクロ観測データから再構成する数学的方法 — 京都大学数理解析研究所講究録 **1532** 情報物理学の数学的構造，pp. 105–117（RIMS 研究集会「情報物理学の数学的構造」（2006 年 6 月）での招待講演）.

[6] 小嶋 泉，量子物理学の基本概念，（大矢雅則・小嶋 泉 編著『量子情報と進化の力学』第 I 部第 2 章，牧野書店（1996））；『数理科学』特集「場の量子論の新たな方向 — その思想と展望をひらく —」，2001 年 4 月号 ［『別冊数理科学』 2006 年 10 月号，特集「場の量子論の拡がり」— 現代からみた種々相 — に再録］；量子論の基本概念：その物理的解釈と超選択則，『数理科学』2002 年 7 月号 ［『別冊数理科学』2006 年 4 月号，特集「量子の新世紀」— 量子論のパラダイムとミステリーの交錯 — に再録］.

[7] Dixmier, J., *C*-Algebras*, North-Holland, 1977; Pedersen, G., *C*-Algebras and Their Automorphism Groups*, Academic Press, 1979.

[8] 小嶋 泉，場の量子論における秩序変数と large deviation，数理解析研究所講究録 **1066** (1998), 121–132.

[9] Ojima, I., A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria — Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings

of adjunctions —, *Open Systems and Information Dynamics* **10** (2003), 235–279 (math-ph/0303009).

[10] 小嶋 泉, だれが量子場を見たか, 江澤 洋先生退職記念数理物理シンポジウム (2003 年 3 月 25 日於学習院大学) の講演集『だれが量子場をみたか』(日本評論社, 2004), pp.65–107.

[11] 小嶋 泉, 場の理論と演算子 : 量子場とは?,『数理科学』2004 年 4 月号;『別冊数理科学』 2006 年 10 月号, 特集「場の量子論の拡がり」— 現代からみた種々相 — に再録.

[12] Haag, R., *Local Quantum Physics — Fields, Particles, Algebras* — (2nd ed.), Springer-Verlag, 1996; 荒木不二洋, 岩波講座現代の物理学 21『量子場の数理』, 岩波書店, 1992.

[13] Ojima, I., Temperature as order parameter of broken scale invariance, *Publ. RIMS* **40** (2004), 731–756 (math-ph/0311025).

[14] Ojima, I. and Ozawa, M., Unitary representations of the hyperfinite Heisenberg group and the logical extension methods in physics, *Open Systems and Information Dynamics* **2** (1993), 107–128.

[15] Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J.E., Fields, observables and gauge transformations I & II, *Comm. Math. Phys.* **13** (1969), 1–23; **15** (1969), 173–200; Local observables and particle statistics I & II, **23** (1971), 199–230; **35** (1974), 49–85.

[16] Doplicher, S. and Roberts, J.E., Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, *Comm. Math. Phys.* **131** (1990), 51–107; Endomorphism of C*-algebras, cross products and duality for compact groups, *Ann. Math.* **130** (1989), 75–119; A new duality theory for compact groups, *Inventiones Math.* **98** (1989), 157–218.

[17] Ojima, I., Symmetry Breaking Patterns — Spontaneous Collapse of SUSY and Others —, pp.337–353 in "Trends in Contemporary Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability", eds. L. Accardi, et al. (Italian School of East Asian Studies, 2000)

[18] Buchholz, D., Ojima, I. and Roos, H., Thermodynamic properties of non-equilibrium states in quantum field theory, *Ann. Phys.* (N.Y.) **297** (2002), 219–242.

[19] Ojima, I., How to formulate non-equilibrium local states in QFT?— General characterization and extension to curved spacetime —, pp.365–384 in "*A Garden of Quanta*", World Scientific (2003) (cond-mat/0302283).

[20] Ojima, I. and Takeori, M, How to observe and recover quantum fields from observational data? — Takesaki duality as a Micro-macro duality —, *Open Sys. Info. Dyn.* **14** (2007), 307–318; Harada, R. and Ojima, I., A unified scheme of measurement and amplification processes based on Micro-Macro Duality — Stern-Gerlach experiment as a typical example —, *Open Sys. Info. Dyn.* **16** (2009), 55–74.

[21] 小嶋 泉・谷村省吾, 双対性をめぐる物理学対話 — 量子と古典, ミクロとマクロ, 『別冊数理科学』2007 年 4 月号, 特集「双対性の世界 — 諸分野に広がるデュアリティ・パラダイム」.

数理物理学(繰り込み群)的視点からみた ペレルマン理論

伊東 恵一

1 はじめに

ペレルマンのリッチ フロー (Ricci Flow) 方程式 [10, 11] は以下の非線形の発展方程式

$$\frac{d}{dt}g_{ij} = -2R_{ij}(g)$$

を意味する．ここで g_{ij} は 多様体 M のリーマン計量，R_{ij} はあとで述べるリッチ テンソルである (有名な原論文は [10, 11]，解説の論文は [8])．これは形からいって物理学のほとんどあらゆる場所で顔をだす形の微分方程式で，たとえば古典力学のハミルトン方程式にも似ている．したがって，気がついてみるとこの方程式に従う多様体上の運動は結構ありそうで，実際ある性質 (conformally flat) をもつ多様体の上のハミルトン方程式がこの形をとることが示されている [1]．変分が上記の方程式になるよう，適当な作用を作ることは物理学ではよくある問題である．実際，リッチ フロー方程式は物理学の分野では

(0) renormalization group

(1) conformal gravity

(2) low-energy effective action of string

(3) classical mechanics

の中で現れている．この中でいちばん古いのは (0) の繰り込み群方程式としてであり，20 年以上前数理物理学で研究されてきたものでもある．ここでは繰り込み群とは何か？ 何ゆえリッチフローがこの場面ででてきたか，現在の状況についてサーベイする．以下の構成で話を進める．

2. 繰り込み群方程式とは何か

3. シグマ模型とその仲間たち

4. Perelman 理論と物理学

   1. 統計力学

   2. 宇宙論

5. まとめ

最近注目されているリッチフローはいろいろな応用がなされているが今回の話題からいうと，繰り込み，シグマ (σ) 模型，宇宙の時間進展は図 1 のようにリッチフローと関連している．

5 年前に Perelman がリッチフローの研究を通して，Poincare 予想を解き，いったいリッチフローとは何か，なぜここに表れたかという疑問がでてくる．そして何故 3 次元と他の次元との差異がでるかもである．そしてこれは繰り込み群が次元によって違う様相を示すことをも反映している．あまり偏見に満ちた意見は読者を惑わすが，この原稿では，リッチフローは図形に関する繰り込み群であるという視点で書き起こすことにする．（しかしこれが成功したか否か正直わからない．）

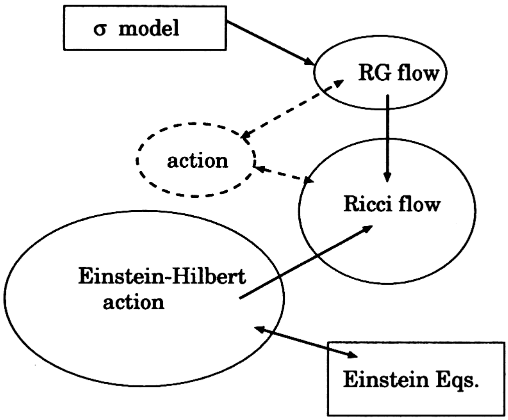


図 1　いろいろなモデルとリッチフローへの道

2　繰り込み群方程式とは何か

歴史的にみると，シグマモデルの繰り込みに関して，リッチフローの方程式がでてくることを最初に指摘したのは，Atiyah の学生であった Friedan [2] である．当初の論文から出版まで結構時間がかかっていて，今読んでも（少なくとも私には）お世辞にもわかりやすいとは言えない．

いわゆる「場の理論」を摂動的に構成する場合，無限大の発散に遭遇し，これの処理法が繰り込み群である．

「無限大 − 無限大 = 有限」

と模式的に言われるが，畢竟（ひっきょう）整合的にこの引き算をおこなうに過ぎない．しかしこの引き算は「漸近的に自由なモデル」と言われているものではほぼ正当化されている．とはいうものの Perelman [10, 11] が引用している Gawedzki と D'Hoker の σ 模型に関する論文 [3, 6]（Princeton の数学科でおこなわれた講義録）もなかなか理解しがたい．

2.1　$\lambda\phi_4^4$ での繰り込み群方程式

形式的に，以下の積分計算をしてみる：

$$
\begin{aligned}
& S(x_1, \cdots, x_n) \\
= \ & \frac{1}{Z} \int \prod \phi(x_i) \exp\left[-\frac{1}{2} Z_0(\phi, (-\Delta)\phi) \right. \\
& \left. - \int \left(\frac{1}{2} m_0^2 : \phi^2 : (x) + \lambda_0 \int : \phi^4 : (x)\right) dx\right] \times \prod d\phi(x)
\end{aligned}
$$

($E = R^4$ の各点 x に対し積分変数 $\phi(x) \in R$ が対応していると考えている.)

「繰り込み」とは，以下遭遇する積分の発散を有限個（いまは 3 個）のパラメータ $Z_0 > 0$, m_0^2, $\lambda_0 > 0$ に押し込める操作をいう.

$\lambda_0 > 0$ が十分小さいとして展開して

$$\lambda_0^2 \int \phi(0)\phi(x) \int : \phi^4 : (\zeta) : \phi^4 : (\xi) d\zeta d\xi d\mu_0(\phi)$$

ここで

$$d\mu_0(\phi) = \frac{1}{\mathcal{N}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\phi, (-\Delta + m^2)\phi)\right] \prod d\phi(x)$$

は平均 0，共変 $(-\Delta + m^2)^{-1}(x, y) = G_0(x - y)$ のガウス (Gauss) 測度で

$$\int \phi(x)\phi(y) d\mu_0(\phi) = G_0(x - y)$$

である．これを 2 点関数といい，$S(x_1, \cdots, x_n)$ は 2 点関数 $G_0(x, y)$ の積 (Feynman graph) の積分で表される．この積分の連結グラフ部分は図 2 で表される．最後になったが，$: \phi^2 : (x) = \phi^2(x) - G_0(0)$ etc. は Wick 積と呼ばれ，ϕ^n から ϕ の n 次エルミート多項式を作ると思えばよい.

その値は，外線から入ってくる運動量を p として

$$\text{自己エネルギー} \ = \ 6\lambda_0^2 \int \frac{e^{ipx}}{(m^2 + p^2)^2} dp \times I(p)$$

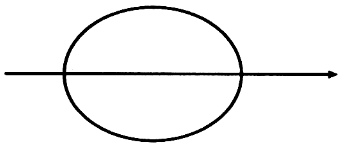


図 2　発散する自己エネルギーグラフ

$$I(p) \equiv \int_{R^4}\int_{R^4} \frac{dk_1 dk_2}{(m^2+(p+k_1)^2)(m^2+(p+k_2-k_1)^2)(m^2+(p+k_2)^2)}$$

すぐにわかるようにこの積分は紫外発散を起こす：

$$I(p) = O(\Lambda^2), \quad \Lambda \to \infty$$

これを回避する方法の代表的なものは格子近似理論であって，x_μ での偏微分を μ 方向差分で置き換える：

$$\begin{aligned} R^4 \to Z^4, &\quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} f(x) \to f(x+e_\mu) - f(x) \\ e_\mu &= (0,\cdots,0,1,0\cdots,0), \quad ((e_\mu)_i = \delta_{i,\mu}) \end{aligned}$$

そして

$$\frac{1}{Z}\int \exp\left[-\sum_{x\in Z^4}\left(\frac{1}{2}m_0^2 : \phi^2 : (x) + \lambda_0 : \phi^4 : (x)\right)\right] d\mu_{Z_0}(\phi)$$

$$d\mu_0(\phi) \equiv \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{x,\mu}(\phi(x+e_\mu) - \phi(x))^2\right] \times \prod_{x\in Z^4} d\phi(x)$$

の積分で極限を考える．

単位格子を $L\times\cdots\times L$ のブロック □ に切り，内部の L^4 個のスピンの重み付き平均を $\phi_1(x)$ に固定し，残りの自由度で積分，この手続きを n 回繰り

返し続けていくと，距離が L^n での作用 (action) が得られる．

$$\phi_1(x) = (C\phi)(x)$$
$$(Cf)(x) = \frac{1}{L^3}\sum_{\zeta\in\Box} f(Lx+\zeta)$$

ただし，ζ は原点中心，大きさ L^4 の立方体 $\Box$ の内部の点である．

逆に $\phi(x)$ は block spin $\phi_1(x)$ とその周りの揺れ (fluctuation) $z_0(x)$ の一次結合で記述される：

$$\phi(x) = (A_1\phi_1)(x) + (Qz_0)(x)$$

ここで $z_0(x)$ は $Z^4\backslash LZ^4$ に生きているガウス分布に従う fluctuation 場で，短い相関をもつ（相関長 $\sim L$）．（A_1, Q は行列で非対角成分は指数的に減少）

4次元では $\phi(x)\phi(y)$ の $d\mu(\phi)$ による期待値は

$$\frac{1}{-\Delta}(x,y) = \frac{1}{|x-y|^2}$$

であるが，$\phi_1(x)\phi_1(y)$ の期待値は

$$\sum_{\zeta\in\Box,\xi\in\Box} L^{-6}\frac{1}{|Lx-Ly+\zeta-\xi|^2} = \frac{1}{|x-y|^2} \sim \frac{1}{-\Delta}(x,y)$$

4次元（質量ゼロの）ガウス測度はこの変換でほぼ不変である．したがって，ϕ_1 も，ϕ_n も同様な（ガウス変数への）分解をもつ：

$$\phi_n(x) = (A_n\phi_{n+1})(x) + (Qz_n)(x)$$

すなわち

$$\int \phi(0)\phi(x)d\mu_0(\phi) = \frac{1}{-\Delta}(x,y) = \frac{1}{|x-y|^2}$$

となる ϕ は短距離相関をもつ独立なガウス変数 $\{z_n(x)\}$ に分解：

$$\phi_0(x) = \sum (\mathcal{A}_n z_n)(x)$$

さらに $\{z_n(x)\}$ は箱 □ の中だけに制限されているという近似を用いると（hierarchical 近似）$d\mu_0(\phi)$ はこの変換で不変で，この積分による変換は二つのパラメータ m^2 と λ に押し込められることがわかる（実際には無限次元空間になるが目をつぶる）：

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= \phi(x) = (A_1\phi_1)(x) + (Qz)(x) \\ &\sim \frac{1}{L}\phi_1\left(\left[\frac{x}{L}\right]\right) + az_0(x), \quad a = \pm 1\end{aligned}$$

L^4 のサイズの立方体の箱 □ で積分は閉じ，漸化式

$$\exp[-V_n(\phi_n)] =$$

$$\int \exp\left[-\frac{L^4}{2}\left(V_{n-1}(\phi_n/L + z) + V_{n-1}(\phi_n/L - z)\right)\right] d\mu(z)$$

$$d\mu(z) = \exp[-z^2/2]\frac{dz}{\sqrt{2\pi}}$$

が得られる．

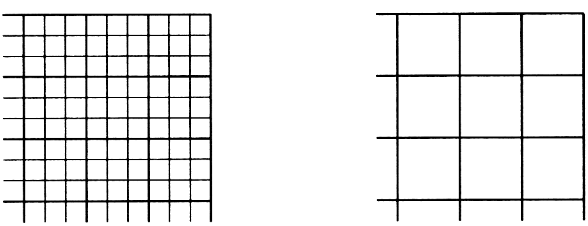


図 3　original squares と decimation

$$V_n(\phi) \sim m_n^2 + \lambda_n\phi_n^4$$

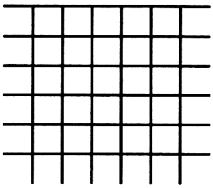


図 4　Decimated blocks reduced to the original size

を想定でき，m_{n-1}, λ_{n-1}, ϕ_n が小さいとき

$$\begin{aligned}\exp[-V_n(\phi_n)] &= \exp[-L^2 m_{n-1}^2 \phi_n^2 - \lambda_{n-1}\phi_n^4] \\ &\quad \times \int \exp[-\lambda_{n-1}(6L^2\phi_n^2 z^2 + L^4 z^4)] d\mu(z) \\ &\sim \exp[-L^2 m_{n-1}^2 \phi_n^2 - \lambda_{n-1}\phi_n^4] \\ &\quad \times \exp[-\tau L^2 \lambda_{n-1}\phi_n^2 + \kappa\lambda_{n-1}^2 \phi^4]\end{aligned}$$

$$(\tau, \kappa > 0)$$

すなわち

$$\begin{cases} \lambda_n &= \lambda_{n-1} - \kappa\lambda_{n-1}^2 + O(\lambda_{n-1}^3) \\ m_n^2 &= L^2(m_{n-1}^2 + \tau\lambda_{n-1} + O(\lambda_{n-1}^2)) \end{cases}$$

以上から，

定理 2.1. (Bleher-Sinai)　繰り込まれた結合定数 λ_n，質量 m_n^2 の極限が存在する <u>裸の結合定数</u> $\lambda = \lambda_0$ と質量 $m^2 = m_0^2$ が一意的に決まる．

この（階層近似化された）例では $\lambda_n \to 0$, $m_n^2 \to 0$ となり，長距離で系は自由場すなわち，入射波が相互作用することなく出ていく，つまり 2 点関数の積の和になるガウス場に収束することを示している．これは複雑な現実世界の記述には失敗していることを暗示している．

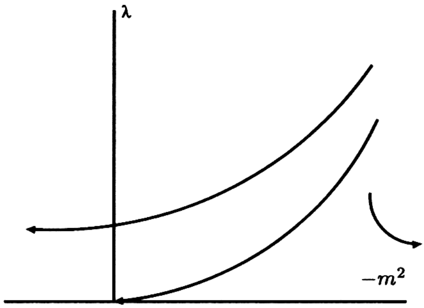


図 5　lattice ϕ_4^4 の繰り込み群の流れ

このモデルでは実モデルの記述には失敗したものの，これから得られる教訓として

主張 2.1. ある種のモデルでは，たとえ発散があっても

1. 各スケールで発散を計算
2. その各々の段階で係数を調整し発散を消去
3. 極限操作

で意味のある物理理論を作ることができる．

これが可能なモデルを 繰り込み可能 であるという．

定理 2.2. (Tomonaga-Feynman-Schwinger-Dyson+ many others)
理論が繰り込み可能である必要条件は発散が有限個のタイプにまとまり，有限個のパラメータの調整で済むこと．

この漸化式を「繰り込み漸化式（方程式）」という．この例ではさらに上の漸化式から

$$\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n-1}} = \kappa > 0$$

よって

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} = \kappa n = -\kappa \log \Lambda$$

ここで $\Lambda^{-1} = L^n$ は低運動量切断(赤外切断)．よって，繰り込まれた結合定数 λ_n は

$$\lambda(\Lambda) = \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0 \kappa \log \Lambda}$$

であり，逆に裸の結合定数は

$$\lambda_0(\Lambda) = \frac{\lambda}{1 + \lambda \kappa \log \Lambda}$$

ゆえに

$$\beta(\Lambda) = \frac{\partial}{\partial \log \Lambda} \lambda(\Lambda) = \kappa \lambda^2(\Lambda)$$

これから逆に $\lambda(\Lambda) \to 0$ $(\Lambda \to 0)$ が結論でき，これを長距離における漸近的自由さ (asymptotic freedom at long distances) と呼んでいる．これは，繰り込まれた物理定数が切断の変化（スケールの変化）に応じてどう変わるかを示す前の漸化式の無限小版であり，これも「繰り込み群方程式」と呼ばれる．

2.2　繰り込み群方程式

連続空間での繰り込みを幾分発見的に考えてみよう．運動量空間 $|p| < \Lambda$ の成分の部分と $|p| > \Lambda$ の部分に二つに分け $\phi(x) = \phi_< + \phi_>$ とし先に $\phi_<$ で積分して様子をみようというのが物理的発想である．補正が以下の代表項の係数の調整で済まなければならない．というのは，これらのみが基本相互作用に表れるからである：

$$\begin{aligned} \lambda &= \phi^4 \text{の係数} \\ Z &= (\phi, (-\Delta)\phi) \text{ の係数} \\ m^2 &= \phi^2 \text{の係数} \end{aligned}$$

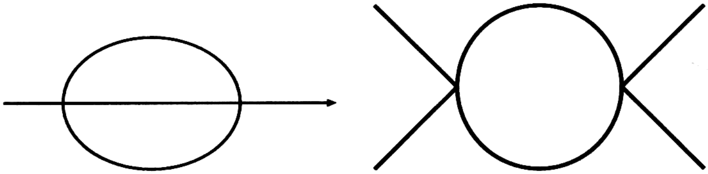


図 6　自己エネルギー $I(p)$ と結合定数 $J(p)$ の発散

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\mathcal{N}}\int\prod\phi_<(x_i)\exp\left[-\frac{Z_0}{2}(\phi,(-\Delta)\phi)\right. \\
& \qquad \left.-\int\left(\frac{m_0^2}{2}:\phi^2:(x)+\lambda_0\int:\phi^4:(x)\right)dx\right]\prod d\phi_<(x) \\
= \;& S_\Lambda(x_1\cdots,x_n) \\
& \times\exp\left[-\frac{Z_1}{2}(\phi_>,(-\Delta)\phi_>)\right. \\
& \qquad \left.-\int\left(\frac{m_1^2}{2}:\phi_>^2:(x)+\lambda_1\int:\phi_>^4:(x)\right)dx\right]
\end{aligned}
$$

と表せる．ここで S_Λ は $\{\phi_<(x); x\in R^4\}$ で積分された結果である．

ここで Z_1, m_1^2, λ_1 には以下のグラフからくる発散が含まれる．

$$
\begin{aligned}
I(p) &= \lambda^2\iint\frac{dk_1dk_2}{(m^2+(p+k_1)^2)} \\
&\quad\times\frac{1}{(m^2+(p+k_2-k_1)^2)(m^2+(p+k_2)^2)} \\
&= \delta m^2+\delta Z(p^2+m^2)+I_0(p) \\
J(p) &= \lambda^2\iint\frac{dk}{(m^2+(p+k)^2)(m^2+p^2)} \\
&= \delta\lambda+J_0(p)
\end{aligned}
$$

ここで I_0 と J_0 は発散のない有限量で

$$\delta m^2 = O(\Lambda^2), \quad \delta Z = O(\log\Lambda), \quad \delta\lambda = O(\log\Lambda)$$

前のようにもし，Z_0, m_0^2, λ_0 を $\log\Lambda$ の関数として上手に選択しておけば，

$$\begin{aligned} m_0^2 &= m^2 - \delta m^2 \\ \lambda_0 &= \lambda - \delta\lambda \\ Z_0 &= Z - \delta Z \end{aligned}$$

($Z = 1$ と固定するのが普通)．摂動の2次での発散は相殺され係数は有限な m^2, λ, Z になる．別の言葉でいえば，物理量 S_Λ は Λ によらず以下の微分方程式の解として求まる．

$$\frac{d}{d\log\Lambda}S_\Lambda = \left(\beta(\Lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + \gamma(\Lambda)\frac{\partial}{\partial Z} + \cdots\right)S_\Lambda = 0$$

ここで

$$\begin{aligned} \beta(\Lambda) &= \frac{\partial}{\partial\log\Lambda}\lambda(\Lambda) = c_1\lambda^2 + O(\lambda^4), \quad c_1 > 0 \\ \gamma(\Lambda) &= \frac{\partial}{\partial\log\Lambda}Z(\Lambda) = c_2\lambda^2 + O(\lambda^4), \quad c_2 > 0 \end{aligned}$$

である．ゆえに，

$$\begin{cases} \lim\limits_{\Lambda\to\infty}\lambda(\Lambda) = \lim\limits_{\Lambda\to\infty}\dfrac{1}{c_0 - c_1\log\Lambda} = 0, & c_1 < 0 \\ \lim\limits_{\Lambda\to\infty}\lambda(\Lambda) = \infty, & c_1 > 0 \end{cases}$$

$c_1 < 0$ ならば，切断を外して $(\Lambda\to\infty)$ $\lambda\to 0$，これを「近距離における漸近的自由さ」(asymptotic freedom at short distances) という．$c_1 > 0$ であれば $\Lambda\to\infty$ で $\lambda(\Lambda)\to\infty$ になり，理論の存在が保証されない．

かみ砕いていえば，前にも述べたことだが

1. $\lambda = 0$ ならいかなる発散もない.

2. 運動量が $|p| < \Lambda$ に制限されていれば $\lambda < \lambda(\Lambda)$, $m_0^2 = m^2(\Lambda)$, etc. のときすべての物理量（電荷や質量など）が観測される量に調整される.

3. 2. の条件を保存しつつ，$\Lambda \to \infty$ とするが，計算途中で起こる発散は 1. から想起されるように，$\lambda \to 0$ とすれば有限に収まると考えられる.

という単純なシナリオである．このシナリオを満たす理論はいま述べた ϕ_4^4 ではなく，ゲージ理論とかこれから述べるシグマ模型とか，コンパクトな非可換群を構造にもつ特殊なモデルであることがわかる．このシナリオが正しいとすれば

予想 2.1. 近距離で漸近的自由な理論のみが存在できる.

このとき，すべての物理量は繰り込まれた，基本的パラメータで表されるわけであるが，やはり摂動展開は $\Lambda \to \infty$ で発散する．これはそれらの諸量がこれらのパラメータについて（原点で特異性があるような）正則でない依存性があるからと推測される.

注意 2.1. (1) 次節で述べる $D = 2$ 次元シグマ模型はこの性質を有する.
$\to$ リッチ フローからの結論
(2) $D > 2$ のシグマ模型などでは λ がある値 λ_* $(\neq 0)$ に近づく.
$\to$ 次元効果の入ったリッチ フローからの結論

3　シグマ模型とその仲間たち

シグマ模型は古典統計力学では，$O(N)$ スピンモデル

$$\langle \vec{s}_0 \vec{s}_x \rangle = \frac{1}{Z} \int \vec{s}_0 \vec{s}_x \exp\left[\beta \sum_{|x-y|=1} \vec{s}_x \vec{s}_y + \sum u(\vec{s}_x) \right] \prod d\vec{s}_x$$

の一般化である．ここに

1. $\vec{s}_x$ は単位球面 S^{N-1} の上に値をとるスピン

2. $u(\vec{s}_x)$ は外部からの磁場などの作用

であり，ストリング (string) 模型の研究の過程で Polyakov によって導入され，曲がった時空の中を動くストリングの運動を記述する．一般に S^{N-1} は適当な多様体 M でかまわない．

$$\begin{aligned} \text{場の変数 } \phi(x) \in R \quad &\rightarrow \quad \text{スピン } \sigma(x) \in S^{N-1} \text{ または} \\ &\qquad \text{リーマン多様体 } M(x)\,(x \in \Sigma) \\ \text{結合定数 } \lambda \quad &\rightarrow \quad \text{metric coupling } g_{ij}(\sigma)\,(\sigma \in M) \end{aligned}$$

と置き換わる．すなわち以下のような作用から出発

$$S[\sigma, g] = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma dx\ \left(g_{ij}(\sigma) \partial_\mu \sigma^i \partial_\mu \sigma^j + u(\sigma) \right)$$

ここで $u(\sigma)$ はタキオン場と呼ばれる場(外部磁場に対応)．場合によっては dilaton 場 Φ と反対称テンソル場 B_{ij} が導入される．

$$\begin{aligned} S[\sigma, B, g] = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma dx\ &\left((\eta^{\mu\nu} g_{ij}(\sigma) + i\varepsilon^{\mu\nu} B_{ij}) \partial_\mu \sigma^i \partial_\nu \sigma^j \right. \\ &\left. + R\Phi(x) + u(\sigma) \right) \end{aligned}$$

(ここでは深入りしない)．そして期待値

$$\int \prod u_j(\sigma_j) \exp\left[-\frac{1}{\hbar} S[\sigma, g] \right] D\sigma$$

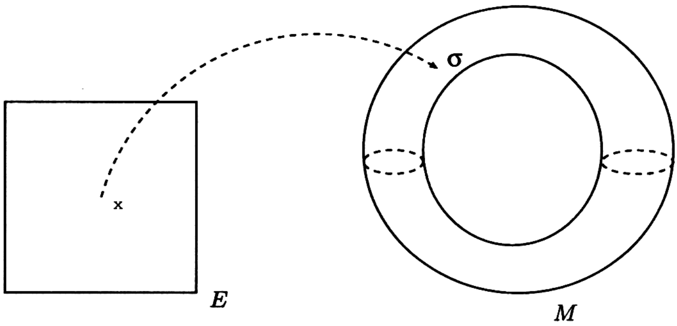


図 7　reference space E と多様体 M

が対象になる．ここで $\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったものである．(i, j, k は多様体 M の局所座標の添字，μ, ν は時空 Σ の座標の添字で，同じ添字については和をとると規約する.)

他方このようなモデルとは異なった視点から，非有界な non-compact シグマモデルが random system の研究からでてきた．これは random matrix 模型とかアンダーソンモデルとかいわれる，結合定数がある分布に従ってでたらめに決定されている系の相関関数 $\langle\sigma_x\sigma_y\rangle_H$ (H はそのときの結合定数 $\{H_{ij} \in R\}$) の研究から始まる．[14] で考察しているモデルでは，random matrix に関連した，局在模型を考慮している：

$$H_{ij} = \sqrt{J_{ij}} R_{ij} \tag{3.1a}$$

$$R_{ij} \text{ の分布} = \exp[-\mathrm{Tr}\, R^2] \prod dR_{ij} \tag{3.1b}$$

ここで

$$J_{ij} = (-W^2\Delta + 1)^{-1}_{ij} \sim \exp[-|i-j|/W]$$

はほぼ W の距離内では定数とみなされる結合定数であり，$R = \{R_{ij} \in R\}$ ごとの値 $\langle f(R_{ij})\rangle_R$ を「焼きいれ」(quenched) の期待値といい，それを $\{R_{ij}\}$

の分布で平均したもの

$$\int \langle f(R_{ij}) \rangle_R \, d\mu(R)$$

を「焼きなまし」(annealed) という．たとえば，アンダーソン局在では拡散係数に関連して (quenched) グリーン関数

$$\left| \frac{1}{E - H + i\varepsilon}(x, y) \right|^2$$

とその平均が必要になるが，Wegner はこの平均化された値が non-compact シグマ模型の期待値で表せることを，dimensional reduction method で示してみせた．これは数学的になかなか厳密化できない部分のように思え，そこを避けた Spencer たちの論文 [14, 15] が私にとってはわかりやすい．

この問題はアンダーソン局在に関連し，現在なおホットな話題である．

3.1　スピン模型たちとその連続極限

具体的モデルとして，S^{N-1} スピン模型と H^{N-1} スピン模型を考えよう．一つは古典的ハイゼンベルグモデルであり，M は $N-1$ 次元球面

$$S^{N-1} = SO(N)/SO(N-1) = \left\{ (x^1, \cdots, x^n); \sum_i (x^i)^2 = 1 \right\}$$

もう一つは $N-1$ 次元双曲面 H^{N-1}

$$\begin{aligned} H^{N-1} &= SO(1, N-1)/SO(N-1) \\ &= \left\{ (x^1, \cdots, x^n);\ (x^1)^2 - \sum_{i=2}^{n} (x^i)^2 = 1,\ x^1 > 0 \right\} \end{aligned}$$

である．

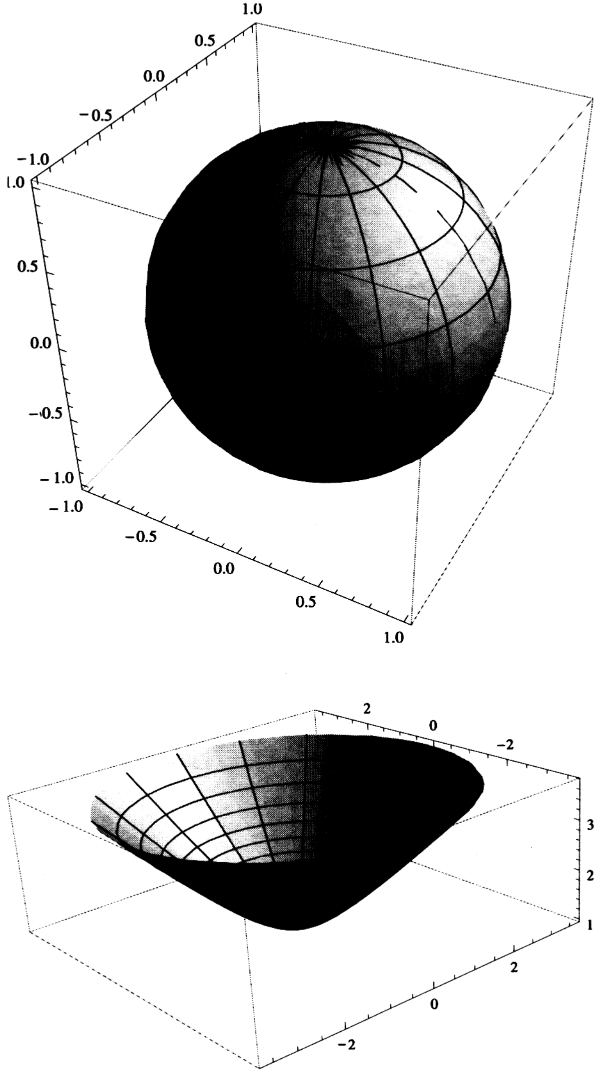


図 8　球面と双曲面

これらは定曲率面で，局所座標を用いて，おのおの

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1 \\
x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\
x_k &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{k-1}\cos\theta_k \\
\cdots &= \cdots \\
x_{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\
x_n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\cosh\theta_1 \\
x_2 &= r\sinh\theta_1\cos\theta_2 \\
x_3 &= r\sinh\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\
x_k &= r\sinh\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{k-1}\cos\theta_k \\
\cdots &= \cdots \\
x_n &= r\sinh\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}
\end{aligned}
$$

と表せる．

古典的ハイゼンベルグモデル $M = SO(N)/SO(N-1) = S^{N-1}$ ではこの局所座標系を用いると ($r = 1$ として)，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ とし

$$
d\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta_i} d\theta_i \equiv \sum_{i=1}^{n-1} u_i d\theta_i \tag{3.2}
$$

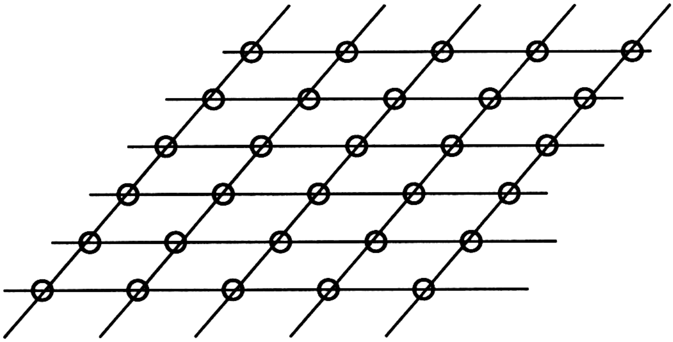


図 9　格子上のシグマ模型，Λ^{-1} は $\Sigma \subset R^2$ に作られた格子の幅．

とおけば，

$$u_i = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_i \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \cos\theta_i \cos\theta_{i+1} \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \cos\theta_i \sin\theta_{i+1} \cos\theta_{i+2} \\ \vdots \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \cos\theta_i \cdots\cdots \cos\theta_{n-1} \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \cos\theta_i \cdots\cdots \sin\theta_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

であり，$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \prod_{k=1}^{i} \sin^2\theta_k$ が成立する．ゆえに

$$\sum_i (dx^i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} g_{ii}(\theta)(d\theta_i)^2 \tag{3.4}$$

$$g_{ii}(\theta) = \langle u_i, u_i \rangle = \prod_{k=1}^{i} \sin^2\theta_k \tag{3.5}$$

同じように双曲面モデル $M = SO(1, N-1)/SO(N-1) = H^{N-1}$ で前述の

局所座標系を用いると ($r=1$ として)，$\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\cdots,x_n)$ とし

$$d\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial\theta_i}d\theta_i\equiv\sum_{i=1}^{n-1}u_i d\theta_i \tag{3.6}$$

とおけば，$\langle u_i,u_j\rangle=0$ ($i\neq j$，内積は $(-,+,\cdots,+)$) なので

$$\langle d\boldsymbol{x},d\boldsymbol{x}\rangle=-(dx_1)^2+\sum_{i=2}^{n}(dx_i)^2=\sum_{i=1}^{n-1}g_{ii}(\theta)(d\theta_i)^2 \tag{3.7}$$

$$g_{ii}=\langle u_i,u_i\rangle=\sinh^2\theta_1\prod_{k=2}^{i-1}\sin^2\theta_k \tag{3.8}$$

この座標系では g_{ij} は対角的である．さて，このときクリストフェル テンソルは

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}g^{i\ell}\left(\partial_j g_{\ell k}+\partial_k g_{\ell j}-\partial_\ell g_{jk}\right) \tag{3.9}$$

$$=\frac{1}{2}(g_{ii})^{-1}\left(\partial_j g_{ii}\delta_{ik}+\partial_k g_{ii}\delta_{ij}-\partial_i g_{kk}\delta_{jk}\right) \tag{3.10}$$

（同じ添字については和をとるものとする）である．リッチ テンソルは

$$R^i_{jk\ell}=\frac{\partial\Gamma^i_{\ell j}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial x^\ell}+\Gamma^i_{km}\Gamma^m_{\ell k}-\Gamma^i_{\ell m}\Gamma^m_{kj}$$

で

$$R_{ij}\equiv R^k_{ikj}=\partial_k\Gamma^k_{ji}-\partial_j\Gamma^k_{ki}+\Gamma^k_{k\ell}\Gamma^\ell_{ji}-\Gamma^\ell_{jk}\Gamma^k_{\ell i}$$

であるが，あらわに計算してもよいが，いまの定曲率スピンモデルでは R_{ij} は g_{ij} に比例する．すなわち，スカラー曲率 R は $R=g^{ij}R_{ij}$ なので，$R_{ij}=Rg_{ij}$，$g^{ij}=(g^{-1})_{ij}$．実際，

$$R_{ij}=\pm\frac{1}{r^2}(N-2)g_{ij},\quad r=\text{円の半径}$$

（S^{N-1} で $+$，H^{N-1} で $-$）が証明される．

それゆえに，このスピン系の Hamiltonian は

$$\sum_{|x-y|=1} \langle (\sigma(x)-\sigma(y)), (\sigma(x)-\sigma(y)) \rangle$$

ここで $x, y \in \Lambda$ であり，S^{n-1} モデルでは $\langle \sigma, \sigma \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i)^2$，$H^{n-1}$ モデルでは $\langle \sigma, \sigma \rangle = -(\sigma_1)^2 + \sum_{i=2}^{n} (\sigma_i)^2$ である．それゆえに格子間隔が大変小さければ，このスピン模型は

$$\sum_{|x-y|=1} \langle (\sigma(x)-\sigma(y)), (\sigma(x)-\sigma(y)) \rangle \sim \int g_{ij}(\theta(x)) d\theta^i(x) d\theta^j(x) d^d x \tag{3.11}$$

で記述されるが，これがシグマ模型の原型である．

シグマ模型に格子近似をおこなえば

$$\begin{aligned} S^{\Lambda}_{g,u}(\phi) &= \frac{1}{8\pi} \sum_{\substack{x,\, y \,\in\, \Sigma_\Lambda \\ |x-y| = \Lambda^{-1}}} g_{ij}(\phi(x))(\phi^i(x)-\phi^i(y))(\phi^j(x)-\phi^j(y)) \\ &\quad + \Lambda^{-2} \sum_x \frac{1}{4\pi} u(\phi(x)) \end{aligned}$$

Λ^{-1} は $\Sigma \subset R^2$ に作られた格子の幅である．ただし，σ が多様体で非線形が前の ϕ^4 に比べて強く $\phi_{n-1} = A\phi_n + Az_{n-1}$ や $\phi = \phi_> + \phi_<$ のような線形分解が機能しない．block spin 変換も試みはあったが進展していない．実際，繰り込み変換が成功する鍵は，block 変換された量が前と同じ構造（つまり群ならば群にうつるなど）をもっていて，いくつかのパラメータに変化が吸収されることであるが，いまの系ではこれはおぼつかない．

さて，解決方法であるが，通常以下のようにおこなわれる：

1. 時空は D 次元であるとし，摂動計算を D について解析接続し $D-2$ でローラン展開，$D \to 2$ で生ずる特異点 $\delta g/(2-D)$ が発散項 $\delta g \times \log \Lambda$

に対応する ($|p| < \Lambda$ は運動量切断になる) :

$$\int \frac{1}{p^2+m^2}\frac{d^Dp}{(2\pi)^D} = 2^{-D}\pi^{-D/2}m^{D-2}\Gamma(1-D/2)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2-D} + (\text{regular part})$$

2. 運動量切断 Λ はないが，長さで測った次元を d として因子 μ^d を補正項に乗じておく．

$$\int \frac{\mu^{2-D}}{p^2+m^2}\frac{d^Dp}{(2\pi)^D} = \frac{\mu^{2-D}}{2\pi}\frac{1}{2-D} + (\text{regular part})$$

3. これらの $(D-2)^{-1}$ の留数が繰り込み処方で取り去られるとみなす．(minimal subtraction)

4. block spin 変換の代わりに，次に議論される，back ground 場 ϕ 上の ξ 理論 $S_\phi(\xi)$ の実効的作用 (effective action) $\Gamma_b(\phi)$ を繰り込まれたそれと考える．

D 次元では

$$d^4x \to d^Dx = x^{D-1}dx$$

Mellin 変換となり発散は表面上消え，$D \to 2$ のとき極として表れてくる．μ の変動は x のスケール変換 $x \to \tilde{x} \equiv \mu x$ に対応する．($x = \tilde{x}/\mu$, μ が大きくなるとき small distance scale)

実効的作用 (effective action) $\Gamma_b(\phi)$ について述べよう．まず，

$$S[\sigma, g] = \int_\Sigma dx\,[g_{ij}(\sigma)\partial_\mu\sigma^i\partial_\mu\sigma^j + u(\phi)]$$

において $\phi : \Sigma \to M$ と section $\xi \in \phi^*TM$ を考え，指数写像 $e^\xi\phi : \Sigma \to M$ を導入

$$\sigma = e^{(\hbar)^{1/2}\xi}\phi, \quad \xi \in T_\phi$$

とおいて ξ 理論の作用を考える.

$\hbar = 1$ としてあとで $\xi_i \to (\hbar)^{1/2}\xi_i$ とする. ξ 理論の作用を次式で考える.

$$\exp[-S_{g,u}(e^{\xi}\phi)]D_g(e^{\xi}\phi) = \exp[-S_{\phi}(\xi)]D\xi \equiv d\mu_{\phi}(\xi)$$

さらに Legendre 変換で

$$\begin{aligned} e^{W(J)} &= \int e^{\langle \xi, J\rangle} d\mu_{\phi}(\xi) \\ -\Gamma(\zeta) &= \inf_{J\in E^*} (-\langle \zeta, J\rangle + W(J)) \\ \Gamma_b(\phi) &\equiv \Gamma(\zeta = 0) \end{aligned}$$

をシグマモデルの *back ground field effective action* という(係数などパラメータは ϕ に依存する). これを展開し *1-loop approximate renormalized action* を得る.

$$(\sigma)^i = (e^{\xi}\phi)^i = (\phi)^i + \xi^i - \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}\xi^j\xi^k + O(\xi^3)$$

とテイラー展開し ξ の 2 次までとり, 共変微分でまとめる. たとえば

$$\begin{aligned} u(e^{\xi}\phi) &= u\Big(\phi + \xi - \frac{1}{2}\Gamma\xi^j\xi^k + O(\xi^3)\Big) \\ &= u(\phi) + \partial_i u(\phi)\xi^i + \frac{1}{2}\nabla_i\partial_j u(\phi)\xi^i\xi^j + O(\xi^3) \\ \nabla_i X_j &= \partial_i X_j - \Gamma^k_{ij}X_k \end{aligned}$$

$(i, j, k, \ell, \text{etc.} = M$ の座標, $\mu, \nu, \text{etc.} =$ 時空 Σ の座標). 2 次のオーダーまでテイラー展開する. 具体的には

$$\begin{aligned} \partial_\nu\phi^i\partial_\nu\phi^j \quad &\to \quad \partial_\nu\phi^i\partial_\nu\phi^j + \partial_\nu\phi^i\partial_\nu\xi^i + \partial_\nu\xi^i\partial_\nu\phi^j + \partial_\nu\xi^i\partial_\nu\xi^j \\ &\qquad - \frac{1}{2}\partial_\nu\phi^i\left(\partial_\nu\phi^\ell\partial_\ell\Gamma^j_{\ell m}\xi^\ell\xi^m + \Gamma^j_{\ell m}\partial_\nu(\xi^\ell\xi^m)\right) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\partial_\nu\phi^j\ (j \to i) \\ g_{ij} \quad &\to \quad g_{ij} + \xi^k\partial_k g_{ij} + \frac{1}{2}(\xi^k\xi^\ell\partial_k\partial_\ell - \Gamma^k_{\ell m}\xi^\ell\xi^m\partial_k)g_{ij} \end{aligned}$$

よく知られた公式

$$\partial_k g_{ij} = g_{im}\Gamma^m_{kj} + g_{jm}\Gamma^m_{ki}, \quad g_{ik}\Gamma^k_{\ell m} = \frac{1}{2}\left(\partial_\ell g_{im} + \partial_m g_{\ell m} - \partial_i g_\ell\right)$$

などを用いて共変な形にまとめあげると

$$\begin{aligned} S(e^\xi\phi) &= \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{g_{ij}(\phi)\partial_\mu\phi^i\partial_\mu\phi^j + u(\phi)\right\}dx \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \Big\{2g_{ij}(\phi)\partial_\mu\phi^i\partial_\mu\xi^j + \partial_i u(\phi)\xi^i \\ &\quad + g_{ij}(\phi)\nabla_\nu\xi^i\nabla_\nu\xi^j - R_{ijk\ell}\partial_\nu\phi^i\partial_\nu\phi^j\xi^k\xi^\ell + \frac{1}{2}\nabla_i\partial_j u(\phi)\xi^i\xi^j \\ &\quad + O(\xi^3)\Big\}dx \\ &= (\text{元の式}) + (\xi\ \text{の 1 次式}) + (2\ \text{次式}) + (3\ \text{次式以上}) \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} S(e^\xi\phi) &= \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left\{g_{ij}(\phi)\partial_\mu\phi^i\partial_\mu\phi^j + u(\phi)\right\}dx \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \Big\{2g_{ij}(\phi)\partial_\mu\phi^i\partial_\mu\xi^j + \partial_i u(\phi)\xi^i + g_{ij}(\phi)\nabla_\nu\xi^i\nabla_\nu\xi^j \\ &\qquad - R_{ijk\ell}\partial_\nu\phi^i\partial_\nu\phi^j\xi^k\xi^\ell + \frac{1}{2}\nabla_i\partial_j u(\phi)\xi^i\xi^j + O(\xi^3)\Big\}dx \end{aligned}$$

ここで

$$\nabla_\nu\xi^i = \partial_\nu\xi^i + \Gamma^i_{jk}(\phi)\partial_\nu\phi^j\,\xi^k$$

(∇_i は M 上の共変微分で添字の相違に注意)，で

$$\begin{aligned} R_{ijk\ell} = g_{ia}R^a_{jk\ell} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j\partial x^\ell} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i\partial x^\ell} - \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j\partial x^k}\right) \\ &\quad + g_{ab}\left(\Gamma^b_{ik}\Gamma^a_{j\ell} - \Gamma^b_{i\ell}\Gamma^a_{jk}\right) \end{aligned}$$

ここで接ベクトル ξ で積分するが，係数がすでに ϕ に依存するので，このままでは難しい．そこでベクトルバンドル ϕ^*TM に大域的正規直交基底 $\{e_a\}_{a=1}^d$

を導入し

$$e_a = e_a^i \frac{\partial}{\partial \phi^i}$$

とする．さらに

$$\xi^i = \xi^a e_a^i$$

として変形すれば結局

$$\begin{aligned} S(e^\xi \phi) &= \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma [g_{ij}(\phi)\partial_\nu \phi^i \partial_\nu \phi^j + u(\phi)]dx \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \Big[(\nabla_\nu \xi)^2 - R_{iakb}\partial_\nu \phi^i \partial_\nu \phi^k \xi^a \xi^b \\ &\qquad + \frac{1}{2} e_a^i e_b^j \nabla_i \partial_j u(\phi) \xi^a \xi^b \\ &\qquad + 2 e_i^a \partial_\nu \phi^i \nabla_\nu \xi^a + e_a^i \partial_i u(\phi) \xi^i \Big] dx + O(\xi^3) \end{aligned}$$

ただし，ここで (e_i^a) は (e_a^i) の逆行列で，$R_{iakb} = e_a^j e_b^\ell R_{ijk\ell}$ そして

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \xi^a &= \partial_\nu \xi^a + A_{b\nu}^a \xi^b \\ A_{b\nu}^a &= e_i^a(\partial_\nu e_b^i + \Gamma_{jk}^i \partial_\nu \phi^j \cdot e_b^k) \end{aligned}$$

ξ 上の積分は摂動的に積分可能であり，主要項のガウス部分とそれ以外に分ける．結局 $\xi_i \to (\hbar)^{1/2}\xi_i$ と元に戻して

$$\begin{aligned} \Gamma_b(\phi) = \frac{1}{4\pi\hbar}&\int_\Sigma [g_{ij}(\phi)\partial_\nu \phi^i \partial_\nu \phi^j + u(\phi)]dx \\ &- \log\Bigg[\int \exp\Bigg(-\frac{1}{4\pi}\int \Big[(\nabla_\nu \xi^a)^2 - R_{iabj}(\phi)\partial_\nu \phi^i \partial_\nu \phi^j \xi^a \xi^b \\ &\qquad + \frac{1}{2} e_a^i e_b^j \nabla_i \partial_j u(\phi) \xi^a \xi^b \Big] dx\Bigg) D\xi\Bigg] + O(\hbar) \end{aligned}$$

さらに log の中で $\nabla_\nu \xi^a = \partial_\nu \xi^a + A_{b\nu}^a \xi^b$ から ξ を取り出し，ガウス項と相互作用の項に分離される：

$$\exp\Big[-S_0 - \sum_{i=1}^{3} S_I^{(i)}\Big] D\xi$$

$$S_0 = \frac{1}{4\pi}\int\left((\partial_\nu\xi^a)^2 + \frac{1}{2}e^i_a e^j_b \nabla_i\partial_j u|_{\phi=0}\xi^a\xi^b\right)dx$$

$$S_I^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\int\left(2A^a_{b\nu}\partial_\nu\xi^a\xi^b + A^a_{b\nu}A^a_{c\nu}\xi^b\xi^c\right)dx$$

$$S_I^{(2)} = \frac{1}{8\pi}\int\left(e^i_a e^j_b\nabla_i\partial_j u(\phi) - e^i_a e^j_b\nabla_i\partial_j u(\phi)|_{\phi_0}\right)\xi^a\xi^b dx$$

$$S_I^{(3)} = \frac{1}{4\pi}\int\left(-R_{iakb}\partial_\nu\phi^i\partial_\nu\phi^k\xi^a\xi^b\right)dx$$

ただし，$\phi_0 = \lim_{|x|\to\infty}\phi(x)$ は無限遠における定数場 ϕ である．（注意： $\hbar$ 依存性は消え，$\hbar\to 0$ では理論は自由場の Gaussian 理論に戻る．）

3.2　発散項と繰り込み

発散項の出自をチェックする．確率測度 $d\nu(\xi)$ を取り出す：

$$d\nu(\xi) = \frac{1}{Z}\exp[-S_0(\xi)]D\xi, \quad \left(\int d\nu = 1\right)$$

$$Z = \int\exp[-S_0(\xi)]D\xi$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\log\det\frac{1}{2\pi}\left(-\delta_{ab}\Delta + \frac{1}{2}(e^i_a e^j_b\nabla_i\partial_j u(\phi)|_{\phi_0})\right)\right]$$

$$積分 = Z\times\int\exp[-S_I^{(1)} - S_I^{(2)} - S_I^{(3)}]d\nu(\xi)$$

$S_I^{(1)}$, $S_I^{(2)} + S_I^{(3)}$, Z で 3 種類の発散

(i)
$$\int\exp[-S_I^{(1)}]d\nu(\xi) \sim 1 - \int S_I^{(1)}d\nu(\xi)$$

は二つのオタマジャクシ型のグラフ 図 10 で表される．

このオタマジャクシ型グラフからの寄与はゲージ不変性によって有限に収まる．発散するのは 図 11 から生ずるものである．

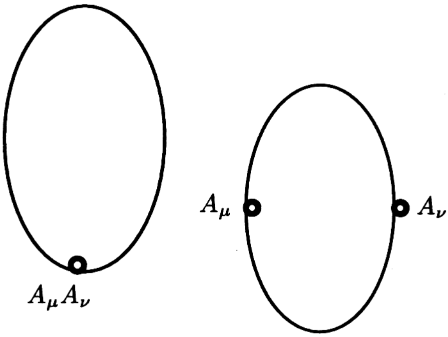


図 10　$S^{(1)}$ の収束するオタマジャクシ型グラフ

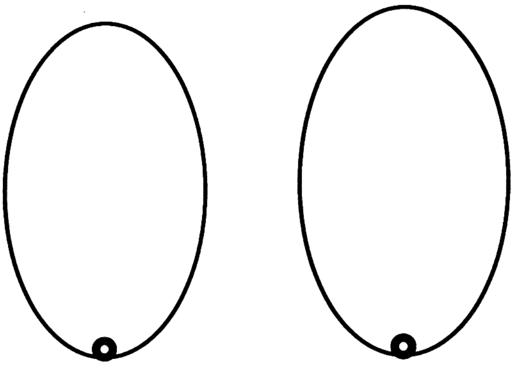


図 11　$S^{(2)} + S^{(3)}$ の発散するオタマジャクシ型グラフ

$$\int \exp[-S_I^{(0)} - S_I^{(2)} - S_I^{(3)}]D\xi$$
$$\sim \quad Z \times \int \{1 - (R\delta\phi\delta\phi\xi\xi) - (ee\nabla\partial u - ee\nabla\partial u|_{\phi_0})\xi\xi\}\, d\nu(\xi)$$

(ii) $R\delta$ と $ee\nabla\partial u$ に乗ぜられている $\xi_i\xi_j$ の積分からでる寄与は

$$\delta_{ij}\int_{|p|<\Lambda} \frac{1}{p^2+m^2}\frac{d^2p}{(2\pi)^2} \to \delta_{ij}\int \frac{1}{p^2+m^2}\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}$$

ここで次元正則法 (dimensional regularization) によって

$$\int \frac{1}{p^2+m^2}\frac{d^Dp}{(2\pi)^D} = 2^{-D}\pi^{-D/2}m^{D-2}\Gamma(1-D/2)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2-D} + \text{(regular term)}$$

ゆえに，発散オタマジャクシ型グラフの極部分は

$$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{2-D}\int\left(-R_{iaja}\partial_\nu\phi^i\partial_\nu\phi^j + \frac{1}{2}(\Delta_g u(\phi) - \Delta_g u(\phi_0))\right)dx$$

ここで $R_{ij} = \sum_a R_{iaja} = R^a_{iaj}$ はリッチ テンソルである．

(iii) さらに行列式の部分は次元正則法によって

$$Z = \exp\left[-\frac{1}{2}\log\det\frac{1}{2\pi}\left(-\delta_{ab}\Delta + \frac{1}{2}(e^i_a e^j_b\nabla_i\partial_j u(\phi)|_{\phi_0})\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\log\det\frac{1}{2\pi}\left(-\Delta\delta_{ab} + \frac{1}{2}(e^i_a e^j_b\nabla_i\partial_j u)|_{\phi_0}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int dx\int \operatorname{tr}\log\frac{1}{2\pi}\left(q^2 + \frac{1}{2}ee\nabla\partial u|_{\phi_0}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int dx\int_0^1 dt\,\operatorname{tr}\frac{1}{q^2+\frac{t}{2}ee\nabla\partial u|_{\phi_0}}\frac{1}{2}ee\nabla\partial u|_{\phi_0}dq + \text{const.}$$
$$= \frac{1}{8\pi}\frac{1}{2-D}\int\Delta_g u(\phi_0)dx + \text{const.}$$

ここで

$$\int \frac{1}{p^2+m^2}\frac{d^Dp}{(2\pi)^D} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2-D} + \text{(regular term)}$$

が再び

$$\frac{1}{2}\int dx\int_0^1 dt\,\operatorname{tr}\frac{1}{q^2+\frac{t}{2}ee\nabla\partial u|_{\phi_0}}\frac{1}{2}ee\nabla\partial u|_{\phi_0}\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}$$
$$= \frac{1}{8\pi}\frac{1}{2-D}\int\Delta_g u(\phi_0)dx + \text{const.}$$

に応用された．以上から，発散項は

$$
\begin{aligned}
[\Gamma_b(\phi)]_{div}^{1\,loop} &= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{2-D}\int R_{ij}(\phi)\partial_\nu\phi^i\partial_\nu\phi^j dx \\
&\quad + \frac{1}{8\pi}\frac{1}{2-D}\int \Delta_g u(\phi)dx
\end{aligned}
$$

となる．$R_{ij} = \sum_a R_{iaja}$ はリッチ テンソルである．さて，このモデルでは以下のような特殊な事情がある．

- 無限大を差し引く（繰り込み）のにこの極の部分のみを差し引くことを，minimal subtraction 法といい，いまはこれに従う.（無限大から無限大を引くので多くの任意性があるのにかかわらず.）
- 結合メトリック g_0 とタキオンポテンシャル u_0 はこれらの発散を相殺すべく選ばれる．次元正則法では，変数が無次元になるように，因子 μ^{D-2}, μ^D を入れる．

繰り込み補正項は ($u(\phi_0)$ が相殺されるので)

$$
\text{裸の結合定数} = \text{物理的結合定数} - \text{発散項}
$$

の繰り込みの原則から

$$
\begin{aligned}
g_0 &= \mu^{D-2}\left(g + \frac{\hbar}{2-D}\delta g_1 + O(\hbar^2)\right) \\
u_0 &= \mu^D\left(u + \frac{\hbar}{2-D}\delta u_1 + O(\hbar^2)\right)
\end{aligned}
$$

($\hbar$ を復活させた.）ただし,

$$
\delta g_1 = R_{ij}, \quad \delta u_1 = -\frac{1}{2}\Delta_g u
$$

3.3　繰り込み群方程式

さて，以上から β, γ を

$$\beta(g,u) = \mu \frac{\partial}{\partial\mu} g \Big|_{\substack{g_0 = const \\ u_0 = const}}$$

$$\gamma(g,u) = \mu \frac{\partial}{\partial\mu} u \Big|_{\substack{g_0 = const \\ u_0 = const}}$$

で定めると（$\mu = \Lambda$ と考えてよい）

$$\mu \frac{d}{d\mu} = \frac{d}{d\log\mu}, \quad \mu^{D-2} = e^{(D-2)\log\mu}$$

から

$$\beta_{ij}(g) = (2-D)g_{ij} + \hbar R_{ij} + O(\hbar^2)$$

$$\gamma(u) = -Du - \frac{1}{2}\hbar\Delta_g u + O(\hbar^2)$$

（$(\mu d/d\mu)\mu^{D-2} = (D-2)\mu^{D-2}$ により極 $1/(D-2)$ が消える）．これらから，摂動計算が整合的に振る舞うためには繰り込まれた結合定数 (running coupling constant) は

$$\frac{\partial}{\partial\log\mu} g_{ij}(\mu) = \beta_{ij}(g) = (2-D)g_{ij} + \hbar R_{ij} + O(\hbar^2)$$

に従わなければならない．よって，若干のスケール変換で

定理 3.1. シグマ模型においては摂動計算の最低次数でリッチフローが成立する：

$$\frac{d}{dt} g_{ij}(t) = (2-D)g_{ij} + R_{ij}(t)$$

$$t \equiv \log\mu \quad (\sim \log\Lambda)$$

注意 3.1. (1) ただし現実の系では，精度を上げるとさらなる項が入ってくる．たとえば [2] では次の項まで計算されている．しかし *SUSY* 模型では，(その好き嫌いは別にして) 高次項は消えるのでその困難さは消える．

(2) この μ は Σ 空間のスケール変換の因子 $x \to \mu x$．μ は我々が系を観察する距離のスケールの逆数である．

3.4 繰り込み群方程式の解と意味

ここで前に考えた定曲率スピンモデルについて論じよう．一つは古典的ハイゼンベルグモデルであり，M は $N-1$ 次元球面

$$S^{N-1} = SO(N)/SO(N-1) = \left\{(x^1, \cdots, x^n); \sum_i (x^i)^2 = 1\right\}$$

もう一つは $N-1$ 次元双曲面 H^{N-1}

$$\begin{aligned} H^{N-1} &= SO(1, N-1)/SO(N-1) \\ &= \left\{(x^1, \cdots, x^n);\ (x^1)^2 - \sum_{i=2}^{n} (x^i)^2 = 1,\ x^1 > 0\right\} \end{aligned}$$

であった．これらは定曲率面で，リッチフロー方程式は簡単になり半径の変化のみで記述される．

μ の影響が等方的：g_{ij} は単位円のメトリック $(g_0)_{ij}$ の半径 $(1/\alpha'(\mu))$ 倍

$$g_{ij} = \frac{1}{\alpha'(\mu)}(g_0)_{ij}$$

Γ^i_{jk}, R_{ij} は半径によらないので

$$\frac{d}{d(\log\mu)}\frac{1}{\alpha'(\mu)} = (2-D)\frac{1}{\alpha'(\mu)} + (N-2)$$

これから 2 次元シグマモデルでは

$$\frac{1}{\alpha'(\mu)} = (N-2)\log\mu + C \to \infty, \quad \mu \to \infty$$

$\mu > 0$ を大きくしていくと

$$g(\mu) = \frac{1}{\alpha'(\mu)} g_0 \sim ((N-2)\log\mu + C)g_0$$

大きい μ は短距離で観察することを意味する．このことは高いエネルギーでは球面 S^{N-1} の半径が無限大になり，したがって曲率はゼロになってフラットな空間の理論つまり「自由場の理論」(Gaussian theory) となる．これは 2 次元のモデルでは相転移がなく，常に質量のある系になるといっており，大方の物理学者の賛同を得ている．

双曲面モデル $M = SO(1, N-1)/SO(N-1) = H^{N-1}$ では状況は全く逆であって，有限時間で $g_{ij} \to 0$（崩落）が起こりこれは相転移が起こっていると理解される．しかしこれは実はかなり危険な結論であって，2 次元のアンダーソン局在が壊れることを暗示するが，他方大方の物理学者は 2 次元では常にアンダーソン局在が起こっていると考えているので，高次の摂動がこのリッチフローをシールドしていると考えるのが自然である．

しかしこれらはすべて証明のない話で，最低次近似の結果なのでいくつかの異論もあるが，厳密な（すべての効果を取り入れた）繰り込み群分析も進行中であることを付け加えたい [7].

3.4.1　他の場合

2 次元ハイゼンベルグ模型では流れは図 12 の左のようになり，2 次元イジング模型では流れは図の右のように期待される．イジング系では鉄アレイの表面上にスピンが値をとるとしている．(取っ手との付け根を smooth にする？)若干のスケール変換のあとこの振る舞いが期待できるのであろう．

注意 3.2. (1)　これは compact symmetric space である M でいつも成り立つ．(非可換ゲージ理論も満たす性質.)

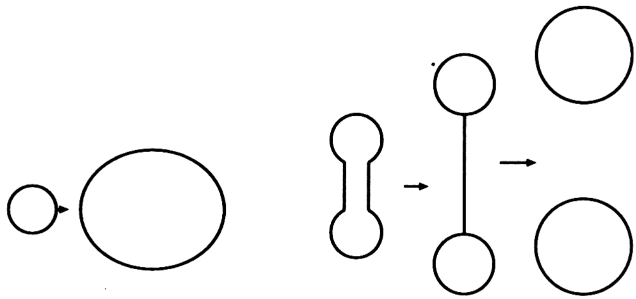


図 12　Heisenberg Model と Ising Model の Ricci Flow

(2)　ここでの μ とリッチフロー方程式の t では符号が逆転して，後者では $dg_{ij}/dt = -2R_{ij}$ なので $g(t) = (1 - 2t(N-2))g_0$ で有限時間で $g_{ij} = 0$ となり，M が低い次元に潰れることになり「崩壊」と呼ばれている．

(3)　もし R_{ij} が負であるような理論では上記と逆のことが起こり，すなわち $\mu \to 0$ で $\alpha'(\mu) \to 0$ が起こる．

$\to$ asymptotic free at long distances

(4)　$D > 2$ では *flow* は固定点（一定の g_{ij}）に収束する(相転移がある)．

固定点の分析 ： $\mu \to \pm\infty$ のとき，g_{ij} はいかなる metric に収束するかは Friedan によって 20 年前になされている．$t = \log\mu$ として g の発展方程式

$$\frac{d}{dt}g = \beta(g) - [v(g), g]$$

$$\beta(g) = (2-D)g_{ij} + \hbar R_{ij} + O(\hbar^2)$$

の固定点は $\hbar \sim 0$ の近傍で求められる．

つまり

$$\beta(g) - [v(g), g] = 0$$

を満たす解 g_{ij} について論じられている．ここで v は任意の M 上のベクト

ル場ですべての diffeomorphism Ψ に対し $v(\Psi_* g) = \Psi_* v(g)$ を満たすもの．($t = \log \Lambda$ または $t = \log \mu$ ととるのが物理的習慣だが，一部の物理の論文や数学 (Perelman) では逆に $t = \log \Lambda^{-1}$ なので注意されたい．)

これは $\hbar$ が小さい極限で調べられ，あるベクトル v_0 に対し

$$R_{ij} - \left\langle \frac{1}{n} R \right\rangle g_{ij} - [v_0, g]_{ij} = 0$$

を満たせばいいことがわかっている．ここで $R = R_{kk}$ はスカラー曲率，$\langle f \rangle$ は M 上の関数 f の M にわたる平均である ($\langle 1 \rangle = 1$)．これからスカラー曲率の M 上の平均 $\langle R \rangle$ の 正，零，負 によって g_{ij} のタイプ が決定される．結論からいうと

$\langle R \rangle \geq 0$:　asymptotic free at short distances

$\langle R \rangle < 0$:　asymptotic free at long distances

さらに g_{ij} の大きさを適当にスケールして，

$$R_{ij} - a g_{ij} = \nabla_i v_j + \nabla_j v_i, \quad a = \pm 1 \text{ または } 0$$

となり，以下の典型的なタイプに分類される：

1. $(-)$ 型 Einstein metric : $R_{ij} + g_{ij} = 0$
2. (0) 型 Einstein (Ricci-flat) metric : $R_{ij} = 0$
3. $(+)$ 型 Einstein metric : $R_{ij} - g_{ij} = 0$
4. quasi-Einstein metric : $R_{ij} - g_{ij} = v_i v_j + v_j v_i \neq 0$

4 Perelman 理論と物理学

前節の議論が以来あまり進まなかったのは，やはり flow を追うのが難しいのと，数理物理的視点から厳密証明に用いるにはかなり難しいため，これ以上の分析は意味がないと思われたからであろう．

しかし flow が遭遇する特異点は，Perelman の手術 (surgery) で処理できる．そういうこともあって数は少ないが，ここ数年重力理論，ブラックホールの時間進展などで，Perelman のアイデア，リッチフロー＋手術 (Ricci flow + surgery) が使われ始めた．

4.1 統計力学

統計力学（スピン模型）

シグマ模型＋1-loop 近似＝リッチフロー

$\sim$ gradient flow of Effective action

リッチフローはシグマモデルと総称される統計力学的系を 1-loop 近似で考えたり，以下論ずる重力理論の Lagrangian からの導出などで生ずる．シグマモデルの 1-loop 近似の精度は高いとは言い難く，近似計算の評価も難しいのでこれによって厳密に何かが証明できたという例は聞かない．しかし，概観を描像するには大変有益である．

Perelman の本来のアイデアは Hamilton のアイデアを完成させることにあった．

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t) = -2R_{ij}$$

我々のパラメータ $t = \log \mu$ では

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t) = (2-D)g_{ij} + R_{ij}$$

である.（符号をリッチフローに合わせるには，$t = -\log\Lambda$.）$D = 2$ または $D < 2$ では S^{N-1} スピンモデルでは $R_{ij} > 0$ なので，g_{ij} の流れは一様に g_{ij} が大きくなる方向に進み，この近似内では asymptotic free at short distances を満たすと考えられる．このことは，一般に等方的なコンパクトな対称空間で成り立つ.

$D > 2$ では S^{N-1} モデルは相転移を起こすモデルで

$$g_{ij} = r(N-2)R_{ij}$$

なので，半径は

$$\frac{d}{dt}r = -(D-2)r + (N-2)$$

つまり

$$g_{ij}(t) = (g_0)_{ij}r(t), \quad r(t) = Ce^{-t(D-2)} + \frac{N-2}{D-2}$$

2次元ハイゼンベルグモデルとイジングモデル（$\sigma = \pm 1 \to \sigma =$ 鉄アレイ）の flow を比較．円筒部は flow で不変，アレイの球部は膨らんでいくので相対的に二つの球に分解する(図13).

(i)　これらのモデルは短距離で漸近的に自由であることを示している．これは連続極限で理論が存在することを示す.

(ii)　2次元イジング模型の連続極限が自由場の関数であることの反映？[昔の佐藤グループの仕事]

スピンの分布が歪なモデルでは，繰り込み変換をおこなうと，いろいろなレベルで Hamilton の遭遇した現象（崩壊）にであうと期待されるが，最後はのっぺりした球面上のスピン分布になりそうである．図14で，左は対称空間，右はじゃがいも型に分布するスピンモデル.

多様体の形状によっていろいろなタイプの相転移が出現することを示唆する．明らかに凹部は面積が狭い部分に密集し滞在確率が高く(相転移)，凹部が崩壊

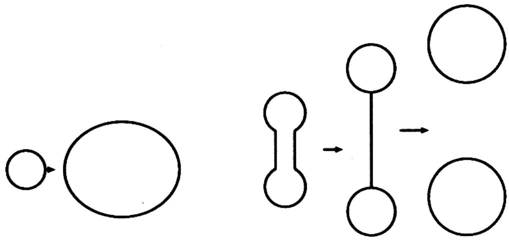


図 13　Heisenberg Model と Ising

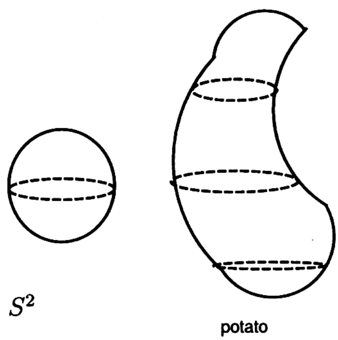


図 14　Pirogov-Sinai と Ricci Flow

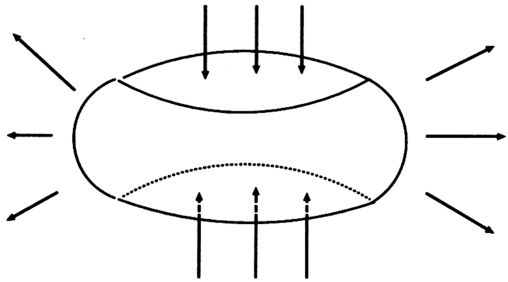


図 15　Ricci Flow は凹部を消し去り凸部を拡大するか？

することが多いと考えられる(あまり根拠のない直感). これは Pirogov-Sinai の定理に近い内容である. 大雑把に言うと

定理 4.1. (Pirogov-Sinai の定理)　$\beta > 0$ を大きく取り, $V(\{\sigma\})$ の最小値の いくらでも近い近傍に Gibbs 測度 $e^{-\beta V}$ の真空があるようにできる.

さて, 逆にリッチフローを Lagrange 方程式のように考え, リッチフローを導く力学系とその作用 (action) を考えることができる. この場合, ストリング理論でいう Dilaton 場 Φ が必要になるが, Perelman 理論では, この Dilaton 場は本質的役割を果たす. (Perelman's Dilaton という場合がある.) この場合シグマ模型のリッチフロー（パラメータを変えて）は, Dilaton 場 Φ 付きになり

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda} g_{ij} &= -2R_{ij} - 4\nabla_\mu \partial_\nu \Phi \\
\frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi &= -\frac{D}{3\alpha'} + \nabla^2 \Phi - 2(\partial_i \Phi)^2
\end{aligned}
$$

が Lagrange 方程式として得られる.

また, これを導く作用 (Lagrangian) であるが, Perelman のそれ (e^{-f} 付

き Einstein-Hilbert action) と同じである．

$$S[g_{ij},\Phi] = -\frac{1}{2\kappa^2}\int_M \sqrt{g}\,e^{-2\Phi}\left(R + 4(\partial_i\Phi)^2 - \frac{2D}{3\alpha'}\right)d\mathrm{vol} + \cdots$$

ここでは σ が消え R と Φ のみの汎関数．

主張 4.1. 純粋なリッチフローは gradient flow ではなく，Dilaton 場 Φ が入る．純粋なリッチフローはそこで，$\Phi =$ 定数 という近似をすればよい．Einstein-Hilbert action もこのように考えるべきであるか？

この Perelman's Dilaton の物理的説明は私にはとってはなかなか難しく，小林氏の解説 [9] 以上に付け加えることは避けたい．

4.2 宇宙論

宇宙論 (black holes)： 直接的モデルは，ブラックホールへの崩壊や宇宙モデルから得られる．適当な宇宙モデルの作用から，変分によりリッチフローにあたるものが得られ，それらは宇宙の進展や，領域内の重力子の統計的性質（すなわちブラックホール）を記述すると考えられる．

ここで紹介する例では，箱（球）の中の重力の熱力学的振る舞いを $S^1 \times S^2$ の境界をもつときに分析し，flow によってブラックホールが消滅し，topology が変化する様相を得ている．さらに最近，上記の仕事を $SU(2)\times U(1)$ 対称性をもつ metrics でおこない，再び Ricci flow with surgery が出現すること，Taub-Bolt か Taub-NUT metric に収束することを議論している [4]．

Einstein-Hilbert Lagrangian

$$S[g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{16\pi G_N}\int_M \sqrt{g}\,R\,dV - \frac{1}{32\pi G_N}\int_{\partial M}\sqrt{\gamma}\,K\,ds$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad \text{(Ricci scalar)}$$

の変分 ($\delta S/\delta g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$ etc.) から Einstein 方程式が得られる：

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \to R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

$S[g_{\mu\nu}]$ を Lagrangian 密度とみなし Lagrange 運動方程式 (gradient flow) として Ricci Flow が得られる：

$$-\frac{d}{d\lambda} g^A = -G^{AB} \frac{\partial S}{\partial g^B}$$

$g^A = g_{\mu\nu}(\lambda)$ として対応関係から

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} g_{ij}(\lambda) = -2R_{ij}(\lambda),$$

または modified Ricci flow

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} g_{ij}(\lambda) = -2R_{ij}(\lambda) + 2\nabla_\mu \xi_\nu$$

となる.

主張 4.2. Time Evolution of Universe = (almost ?) Ricci flow

主張 4.3. Solution can be continued by surgery.

いくつかの例： ブラックホールの進化

球中の重力の熱力学的振る舞いを $S^1 \times S^2$ の境界をもつときに分析し，flow によって宇宙の構造が変化する様子を描像する.

- 半径 $= R$
- 球は温度 $1/\beta$ の熱浴に接している (S^1 の半径)
- 解析接続で Euclidean 重力.
- S^1 は Euclidean periodic time $= \beta$

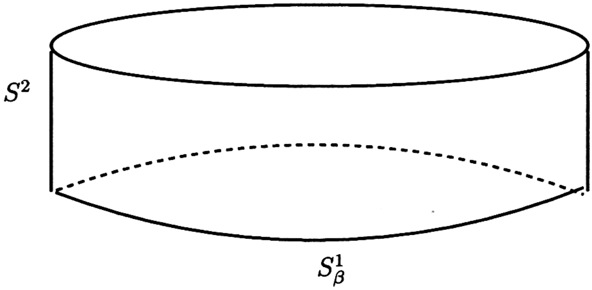


図 16　$\partial M = S^1 \times S^2$, β は周期

$$Z = \int_M \exp[-S[g]]dg$$
$$\sim \sum_{\text{saddle point}} \exp[-S[\text{saddle point}]] \times (\text{determinant})$$

$S[g]$ の停留点 (saddle points = Ricci zero points) から出発し，リッチフローを追跡する．

$\partial M = S^1 \times S^2$ を満たす 3 個の解が存在 (saddle points)：

1. hot flat space $S^1 \times B^3$ (stable for flow)
2. small black hole $S^2 \times B^2$ (unstable for flow)
3. large black hole $S^2 \times B^2$ (stable for flow)

ここからの flow の流れ，宇宙の進展を調べた．

注意 4.1. (1) 温度は S^1 の周の長さ β を通じて導入される．

(2) black holes は (Euclidean) Schwazschild 解に対応，大，小は horizon までの距離で決める．

(3) $\partial(S^1 \times B^3) = S^1 \times S^2$, $\partial(S^2 \times B^2) = S^2 \times S^1$.

二つのブラックホールは (Euclidean) Schwazschild 解で共に構造 $B^2 \times S^2$ をもち

$$\begin{aligned} ds^2 &= 4r_0^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)d\tau^2 + \left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-1}dr^2 + 4r^2 d\Omega_2^2 \\ \beta &= 4r_0\pi\sqrt{1-\frac{r_0}{R}} \end{aligned}$$

ここで

- $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ は 2 次元球面
- 地平 horizon の位置 $r_0 = 2GM/c^2$

は β に対し二つ決まり

- $r_0 < 2R/3$ のとき小さいブラックホール
- $2R/3 < r_0 < R$ のとき大きいブラックホール

Flow の追跡は解析的には難しいが，計算機実験で最初三つの鞍点（ブラックホールに対応）からリッチフローを追跡した．新しい変数 $\rho < 0$ を導入 $(r = R \to \rho = 0,\ r = r_0 \to \rho = -\infty)$

$$\begin{aligned} ds^2 &= T(\rho)^2 d\tau^2 + d\rho^2 + S^2(\rho)d\Omega_2^2 \\ \frac{d}{d\lambda}g_{ij} &= -2R_{ij} \pm h_{ij} \end{aligned}$$

T は Euclidean time radius，S は spherical radius．$\pm h_{ij}$ は境界条件を共有する微小項(摂動)（一定のスペクトルをもつ）．

計算機実験：

(1)　小さな black hole $+h_{ij}$

1. $r_0 < 2R/3$ (small black hole) に $+h_{ij}$ を加え λ を 0.05 きざみで，$T(\rho)$, $S(\rho)$ を計算．

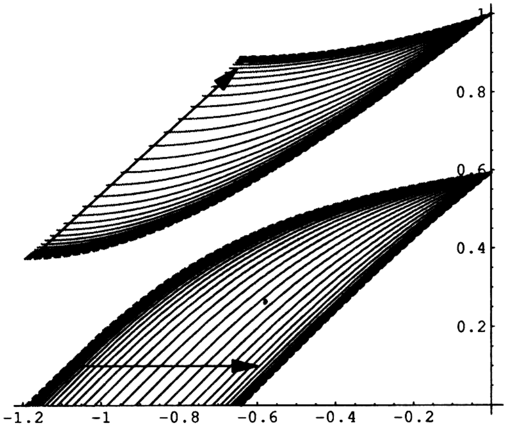


図 17　Ricci Flow of big black hole

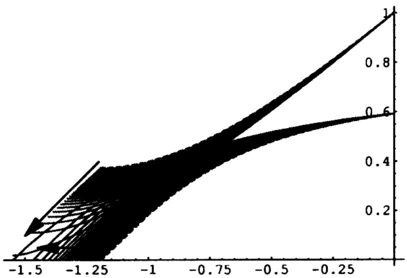


図 18　small black hole が崩壊に遭遇 : $\rho < -1.6$ で $T = S = 0$

2. 摂動によらず一定の大きな black hole に収束 ($S(\rho) \to 1$).

(2) 小さな black hole $-h_{ij}$

1. $r_0 < 2R/3$ (small black hole), λ を 0.05 きざみで，$T(\rho)$, $S(\rho)$ を計算.

2. $-h_{ij}$ より崩壊で止まり，手術を経て $S^1 \times B^3$ に収束 ($\rho \to \infty$ にいたるも，$T = 0.6$).

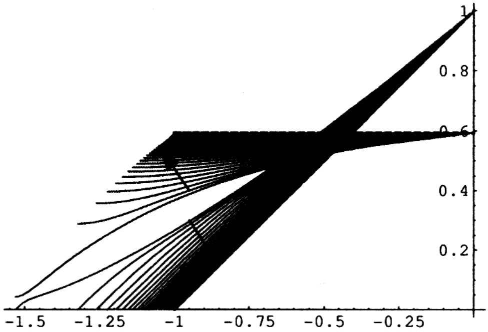


図 19　手術後の Ricci Flow: $T(\rho)$ が ρ によらず 0.6

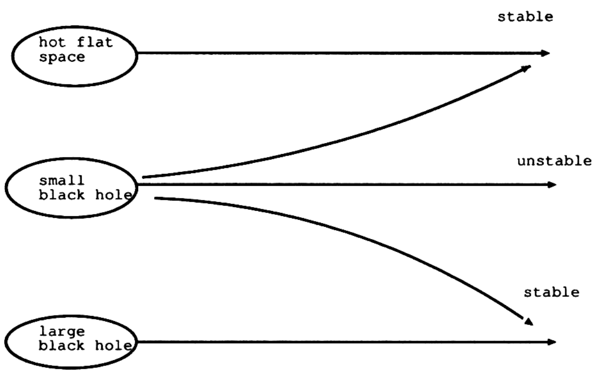


図 20　Ricci Flow of 3 saddle points:topology-change happens

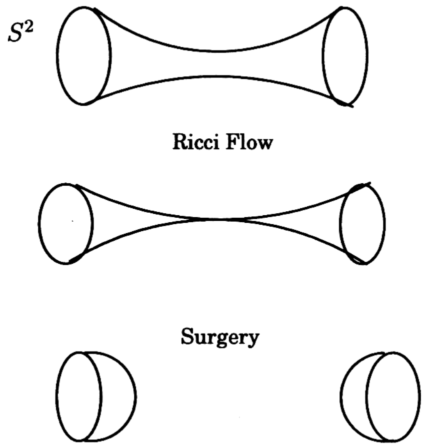


図 21　saddle point の崩壊と surgery

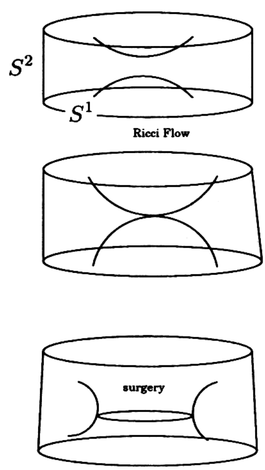


図 22　Ricci Flow により horizon が潰れ特異点になり，手術で annulus $S^1 \times B^3$ になる．

4.3　最近の流れ

前の研究 [Headrick, Wiseman] では

$$S^2 \times B^2 \to B^3 \times S^1$$

を論じたが，[G.Holzegel et al] は境界が squashed S^3 である $S^3 \times B^1$ から出発し，

$$S^3 \times B^1 \to B^4 \times S^0$$

の topology change がリッチフロー（ブラックホールの時間進展）で起こることをチェックした．

5　まとめ

我々は以下のことを議論した．

1. 場の理論の繰り込み群の研究から，繰り込み群方程式を導出し，漸近的自由の意味を明らかにした．

2. シグマ模型にこの概念を当てはめ，1-loop 近似のレベルで繰り込み群方程式が Ricci flow になることを示した．

3. $D = 2$ 次元での S^{N-1} のスピンモデル（ハイゼンベルグモデル）では，$R_{ij} > 0$ で，リッチフローは $t \to -\infty$ で g_{ij} の発散を示し，これは 2 次元でのハイゼンベルグモデルに相転移がないということを傍証する．

4. 他のスピンモデルでは研究例がないが，Pirogov-Sinai の定理に対応し形状によっていろいろな「崩壊」が起きると予想される (surgery ?).

5. 最近重力場や，ブラックホールの時間進展の研究において応用され始めてきた．ブラックホールが崩壊し topology change の起こるプロセスが surgery によって追尾できる．

謝辞．この研究は the Grand-in-Aid for Scientific Research (C) 15540222 from JSPS によって経済的援助を受けております．またこの内容については一部，K.Gawedki (Lyon), E.Seiler (MaxPlanck), 米谷民明（東京）の各氏からご教示賜りました．ここに御礼申し上げます．

参考文献

[1] S. Abraham, P. Fernandez J. Isidoro and J. Santander, A mechanics for the Ricci flow, arXiv:hep-th:0810.2356v3

[2] D.H. Friedan, Nonlinear Models in 2+ε dimensions, *Ann.Phys.*, **163** (1985), 318–419

[3] K. Gawedzki, Lectures on conformal field theory, Quantum Fields and strings, (Princeton, 1996–7)

[4] M. Headrick and T. Wiseman, Ricci Flow and black holes, arXiv[hep-th]/0606086

[5] G. Holzegel, C. Schmelzer and C. Warmick, Ricci Flow of Biaixial Bianchi IX Metrics, arXiv:hep-th:0706.1964

[6] E. D'Hoker, String Theory, (Princeton, 1996–7)

[7] K.R. Ito and H. Tamura, N-dependence of Upper Bounds of Critical Temperarture of 2D O(N) Spins, *Commun. Math. Phys.*, **202** (1999), 127;
K.R. Ito, Approximate Renormalization Group recursion formulas in 2D O(N) Spin Models, *J. Stat. Phys.*, **107** (2002), 821. Papers in preparation.

[8] B. Kleiner and J. Lott, Notes on Perelman's papers, arXiv:math:DG:0605667v2 21 Feb 2007

[9] 小林亮一，対数 Sobolev 不等式，エントロピー公式，Riemann 幾何的熱浴，『数学』，第 60 巻第 3 号 pp.225–247 及び 第 4 号 pp.352–367

[10] G. Perelman, The Entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math.DG/021159 v1 11 Nov2002

[11] G. Perelman, Ricci Flow with surgery on three-manifolds, arXiv:math.DG/0303109 v1 10 Mar2002

[12] J. Polchinski, *String Theory*, vol. 1 (Cambridge, 1998), Chap.3

[13] 特集「リッチ フロー」,『数学セミナー』2004 年 9 月号

[14] T. Spencer and M.R. Zinbauer, Spontaneous Symmetry Breaking of a Hyperbolic σ model in 3 Dimensions, *Comm. Math. Phys.* **252** (2004)

[15] T. Spencer, M. Disertori and M.R. Zinbauer, Quasi-diffusion in a 3D Supersymmetric Hyperbolic Sigma Model, arXiv[math-ph]:0910.1652v1 12 Jan 2009

リッチフローと4次元異種微分構造

石田 政司

1 序

X を向き付けられた，n 次元閉リーマン多様体とする．本稿の主役である X 上の**リッチフロー** (Ricci flow) の解または，リッチフローの方程式の解とは，X 上のリーマン計量のパラメーター族 $\{g(t)\}$ で次の非線形偏微分方程式を満たすものである．

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)}, \quad g(0) = g_0$$

ここで g_0 は初期計量，Ric はリッチ曲率である．このリッチフローの方程式は，与えられたリーマン計量をできる限り性質のよい計量に変形しようという考えでハミルトン (R. Hamilton) [22] によって 1980 年代初頭に導入された．多様体上にリーマン計量を与えることはその多様体の形を一つ決めることに対応しているので，感覚的には，多様体の形を変形しきれいな形にする，またはきれいな形に落ち着くことを期待する，ということになる．

リッチフローの方程式の形からただちにわかることは，リッチ曲率が正の部分は時間 t と共に収縮し，リッチ曲率が負の部分では時間と共に拡大してゆく．よってたとえば，n 次元球面はリッチフローにそって 1 点につぶれてしまう．球面はもともと対称性の高いきれいな形なのでこれを崩壊させるのではなく，不変にするようにリッチフローの方程式を変形するのは自然であ

る．計量を時間と共に拡大，縮小することで多様体の体積を一定に保つ条件を付け加えた次の方程式を，**正規化リッチフロー** (normalized Ricci flow) の方程式とよぶ．

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)} + \frac{2}{n}\overline{s}_{g(t)}g(t), \quad g(0) = g_0$$

ここで，s_g をリーマン計量 g のスカラー曲率としたとき，$\overline{s}_g := \int_X s_g d\mu_g / vol_g$ と定義される．また vol_g は計量 g に関する多様体の体積である．本稿では $n = 4$ の場合，すなわち，4 次元多様体上の正規化リッチフローを考察する．

一方，1980 年代初頭のフリードマン (M.H. Freedman) [18]，ドナルドソン (S.K. Donaldson) [10] らの大きな仕事をきっかけとして，4 次元多様体の世界には位相構造は同じでも微分構造が異なる多様体（**異種微分構造**，**エキゾチックな微分構造**とも言われる）が特殊なものではなく，きわめて豊富に存在することが現在知られている．特に，ドナルドソンは 4 次元多様体上の主束の接続に関する非線形偏微分方程式の解空間の構造を解析することで，それ以前には全く予想すらされなかった数々の深い結果を証明し，4 次元トポロジーの世界に革命を起こした．その深い帰結の一つが，エキゾチック $\mathbb{R}^4$ とよばれる，$\mathbb{R}^4$ と位相同型だが微分同相ではない 4 次元多様体の存在であった．この影響は現在でも続いており，特に 1990 年代初頭の**サイバーグ - ウイッテン方程式** [66] の導入以後，4 次元の異種微分構造に関する理解が大きく進展している．

本稿では，4 次元多様体上の正規化リッチフローの解の存在，非存在と 4 次元異種微分構造の関係という微分幾何学と微分位相幾何学の二つの分野の中心に位置する問題を，理論物理学に起源をもつサイバーグ - ウイッテン方程式の応用という数理物理的な視点から論じる．しかし筆者は数学者なので，あくまでも数学的な立場から見える風景を解説したい．

$n = 3$ の場合，すなわち，3 次元多様体上のリッチフローはペレルマン (G.

Perelman) の理論 [55, 56, 57] によって，3 次元ポアンカレ予想が解決されるなど大きな成功を収めた．本稿で扱うのは 4 次元の世界である．本稿の第 4 章でペレルマン不変量とよばれる微分同相不変量について解説するが，本稿の主要な部分は，ペレルマンの仕事とはほとんど独立である．むしろ本稿では，ペレルマンの仕事とは独立な立場，特に（数学で言うところの）ゲージ理論的な立場から 4 次元のリッチフローについて何が言えるのかをあまり細部にはこだわらずに解説したい．副題を付けるならば,「ゲージ理論的立場から見た 4 次元のリッチフロー」となると思われる．

本稿の構成を説明しておく．第 2 章では，少し寄り道をしながら本稿で解説する内容の背景を解説し，2.6 節で本稿の主結果を述べる．この章を読めば細部に触れることなく本稿で解説する内容の主要な部分は理解できるように書いたつもりである．第 3 章，第 4 章，第 5 章の 5.1 節までが，2.6 節で述べた主結果の証明の解説のための準備である．主結果の証明の解説は 5.2 節，5.3 節でおこなう．最後の第 6 章は本稿の簡単なまとめであり，関連する予想なども述べることにしたい．

本稿全体を通じて，n 次元多様体 X と言えば，向き付けられた，連結，閉(境界なし，コンパクト）n 次元微分可能多様体をさすことにする．4 次元多様体 X の交叉形式の正の固有値の数を $b^+(X)$，負の固有値の数を $b^-(X)$ で表す．また，X のオイラー数を $\chi(X) = 2 - 2b_1(X) + b_2(X)$，符号数を $\tau(X) = b^+(X) - b^-(X)$ と表す．さらに，4 次元多様体 X と Y に対し $kX \# \ell Y$ は，k 個の X を連結和したものに ℓ 個の Y を連結和したものを意味している．位相多様体と書いた場合は，微分構造を考えていない．

本稿を執筆するにあたり，the Grant-in-Aid for Scientific Research (C), Japan Society for the Promotion of Science, No. 20540090 の援助を受けていることを記し，感謝の意を表す．

2　4次元トポロジー，微分構造，リッチフロー

2.1　4次元微分ポアンカレ予想

M を n 次元多様体とし，$n \geq 3$ とする．M が単連結で，さらにそのホモロジー群が n 次元球面 S^n のホモロジー群と同型の場合，M は n **次元ホモトピー球面**とよばれる．このとき**一般化されたポアンカレ予想**とよばれる次の予想がある．

予想 2.1　n 次元ホモトピー球面は n 次元球面 S^n と位相同型である．

$n = 3$ の場合が普通，ポアンカレ予想とよばれているものである．実は，予想2.1は現在，予想ではなく定理となっている．まず，1961年にスメール (S. Smale) [61] が $n \geq 5$ の場合に肯定的に解決した．21年後の1982年に $n = 4$ の場合も正しいことをフリードマン [18] が証明した．そのまた21年後の2003年に，読者の記憶に新しいと思うが，ペレルマン [55, 56, 57] が $n = 3$ の場合に正しいことを証明した．$n \geq 5$, $n = 4$, $n = 3$ のそれぞれで証明が全く異なり，またそれぞれに次元の特殊性を使う興味深い方法で証明されている．ちなみに，スメールとフリードマンはフィールズ賞を受賞しているが，ペレルマンはフィールズ賞を辞退している．

さて，上の予想は位相同型という位相カテゴリーで考えているが，微分同相という微分位相カテゴリーで予想2.1の類似を考えるのは自然であろう．

問題 2.2　n 次元ホモトピー球面は n 次元球面 S^n と微分同相であるか？

驚くべきことに，予想2.1とは異なり，問題2.2は一般には成立しないことが知られている．1956年にミルナー (J.W. Milnor) [50] が7次元球面と位相同型だが，微分同相ではない7次元多様体が存在することを証明した．この多様体は7次元エキゾチック球面，もしくは7次元異種球面とよばれている．

すなわち，7 次元球面に位相同型だが，微分同相でない 7 次元多様体が存在するのである．同じことだが，7 次元球面の標準的な微分構造を忘れて一つの位相多様体と考えるとき，その位相多様体は標準的な微分構造とは異なる微分構造，すなわち，異種微分構造を許容すると言っている．この結果は位相同型と微分同相の差を表す最初の結果であり，これを起点として微分位相幾何学（微分トポロジー）という分野が切り開かれたのであった．

3 次元多様体の微分構造は一意であることがわかっているので，3 次元では異種微分構造は存在しない．さらに，ペレルマンによる 3 次元ポアンカレ予想の解決により，3 次元ホモトピー球面は 3 次元球面 S^3 と微分同相でもあることが従う．しかし，本稿の舞台である 4 次元の場合は不明であり，次の予想がある ([19] も参照せよ)．

予想 2.3　4 次元ホモトピー球面は 4 次元球面 S^4 と微分同相である．

この予想は **4 次元微分ポアンカレ予想**とよばれている．次の節で説明するように，4 次元の微分構造の性質は他の次元と際立って異なった様相を呈しており，ある意味で異種微分構造はありふれている．そのような現象を思うとき，予想 2.3 が否定的に解決されるのではないかと想像する数学者は少なくないのではないか，と筆者には思われる．肯定的もしくは否定的にせよ，解決できればフィールズ賞を受賞できるに違いないくらいの難問である．残念ながら，筆者には予想 2.3 について正面きって論じる力はないが，本稿で解説する内容にからめて，関連する予想（予想 6.5 を参照）を本稿のいちばん最後に定式化することにしよう．

2.2 異種微分構造（エキゾチックな微分構造）

4 次元の異種微分構造の性質は他の次元と際立って異なっていることが現在までの研究で判明している．この節では，これについていくつかの話題に限定して紹介する．特にこの節では，[47, 48] を少なからず参照させていただいた．歴史的な側面も含めてよりよく知りたい読者は [47, 48] を参照せよ．

X を 4 次元多様体とする．4 次元多様体を分類する上で重要な役割を果たすものとして，**交叉形式** Q_X とよばれる，2 次のホモロジー群 $H_2(X,\mathbb{Z})$ 上の非退化，対称，双 1 次形式がある．

$$Q_X : H_2(X,\mathbb{Z}) \times H_2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

交叉形式は行列式が ± 1 である整数成分の対称行列で書けることを注意しておく．4 次元多様体の分類に関わる問題として，少し漠然としているが，次が自然に考えられる．

問題 2.4　どのような $\mathbb{Z}$ 上の非退化，対称，双 1 次形式が，4 次元多様体の交叉形式として実現されるのか？

驚くべきことにこの問題は，位相カテゴリーで考えるのか，それとも微分位相カテゴリーで考えるのかで答えが異なってくることが知られている．位相カテゴリーの場合に本質的な寄与をしたのは，フリードマン [18] であった．特に副産物として，4 次元ポアンカレ予想の解決をした．フリードマンの結果は，$\mathbb{Z}$ 上の非退化，対称，双 1 次形式を任意に与えたとき，それを交叉形式にもつような，単連結閉 4 次元位相多様体は常に存在する，という驚くべきものである．すなわち，位相カテゴリーで考える限り単連結の仮定の下ではあるが，問題 2.4 に対する障害はない．

一方，微分位相カテゴリーで問題 2.4 を考察すると，事情が一変することが古くから知られていた．ここで，用語をいくつか導入する．4 次元多様体 X

の交叉形式 Q_X は $Q_X(x,x) \equiv 0 \pmod 2$ を満たすとき，II 型とよばれる．II 型でない交叉形式を I 型とよぶ．II 型の交叉形式をもつ単連結閉 4 次元多様体を**スピン多様体**という．単連結閉 4 次元スピン多様体の符号数は 16 の倍数であることを，ロホリン (V. Rokhlin) が 1952 年に証明していた．符号数は交叉形式の正の固有値の数から負の固有値の数を引いたものなので，ロホリンの結果は交叉形式に制限を与える．つまり，位相カテゴリーでなく微分位相カテゴリーで考える場合，問題 2.4 に対する障害があることになる．特にロホリンの結果により，$\mathbb{Z}$ 上の非退化，対称，双 1 次形式で 4 次元多様体の交叉形式として実現できないものが存在する．すでに述べたように，位相カテゴリーではそのようなものは存在しないことに注意してほしい．ロホリンの定理は長らく 4 次元微分可能多様体の交叉形式に制限を与える唯一つの結果であった．

ロホリンの定理からは帰結できない結果をもたらしたという意味で，本質的に新しい結果は 1983 年にドナルドソン [10] によって証明された．それは，4 次元多様体の交叉形式が正定値ならば，その交叉形式は単位行列で表される標準的な双 1 次形式に同値である，という結果である．行列式が ±1 である整数成分の対称行列で書ける双 1 次形式は不定値の場合，分類されている．しかし定値の場合は分類が知られていない．上記のドナルドソンの結果は，4 次元多様体の交叉形式が定値の場合，標準的なものしか現れないと主張しており，非常に強い制限を与えている．ドナルドソンはこれを代表的な仕事とする一連の業績により，フィールズ賞を受賞した．この結果が注目を集めた理由は，結果自体がものすごいこともあるのだが，その証明方法がひとつの分野を切り開くほどに斬新だったことがあげられる．

以上のフリードマンとドナルドソンの結果から，$\mathbb{R}^4$ と位相同型だが，微分同相ではない 4 次元多様体の存在が帰結されることが知られている．この

ような多様体をエキゾチック $\mathbb{R}^4$ とよぶ．$n \neq 4$ に対して，エキゾチック $\mathbb{R}^n$ は存在しないことが現在知られているので，この結果の異常さが納得できる．これは，1956 年のミルナーによる 7 次元エキゾチック球面の発見以来の衝撃を与えた．

さて，エキゾチック $\mathbb{R}^4$ は閉 4 次元多様体ではなく，開 4 次元多様体である．それでは，閉 4 次元多様体の場合にも類似した現象があるかを問うのは自然である．これは本稿の主題にも関連しているので，以下簡単に，最近の動向も含めて解説したい．

まず，フリードマンとドナルドソンの理論の帰結の一つとして次が知られている．

系 2.5　X を I 型の交叉形式をもつ，単連結閉 4 次元多様体とする．このとき X は $k\mathbb{C}P^2 \# \ell\overline{\mathbb{C}P^2}$ に位相同型である．ここで，$k = b^+(X)$, $\ell = b^-(X)$.

$\mathbb{C}P^2$ は 2 次元複素射影空間である．これは複素多様体であるので，複素構造から定まる向きが自然に入る．その向きとは逆の向きを入れた 4 次元多様体を $\overline{\mathbb{C}P^2}$ と書いている．これらのいくつかを連結和したものが，$k\mathbb{C}P^2 \# \ell\overline{\mathbb{C}P^2}$ である．

一方，II 型の交叉形式をもつ場合に関しては次の予想がある．

予想 2.6　X を II 型の交叉形式をもつ，単連結閉 4 次元多様体とする．このとき X は，S^4, $m(K3) \# n(S^2 \times S^2)$ および，その向きを逆にしたもの，のいずれかに位相同型である．

ここで，$K3$ とは，$K3$ 曲面とよばれる標準束が自明な単連結複素曲面のことをさす．この予想は，松本幸夫によって定式化された **11/8 予想**とよばれる次の予想と本質的に同値であることが知られている．

予想 2.7 ([46])　II 型の交叉形式をもつ 4 次元多様体 X は次を満たす．

$$b_2(X) \geq \frac{11}{8}|\tau(X)|$$

ここで $b_2(X)$ は X の第 2 ベッチ数である．

この予想は未解決であるが，強い部分解が古田幹雄 [14] によって得られている．すなわち，II 型の交叉形式をもつ 4 次元多様体 X は

$$b_2(X) \geq \frac{10}{8}|\tau(X)|$$

を満たすことが証明されている．11/8 予想を仮定すれば，単連結閉 4 次元多様体の下部構造としての位相多様体は大きく

$$k\mathbb{C}P^2 \# \ell\overline{\mathbb{C}P^2},\quad S^4,\quad m(K3) \# n(S^2 \times S^2)$$

の三つの系列に限られることがわかる．$k\mathbb{C}P^2\#\ell\overline{\mathbb{C}P^2}$ はスピン多様体ではなく，残りの二つは共にスピン多様体である．以上を考慮すると，単連結閉 4 次元位相多様体の異種微分構造の存在，非存在問題は次の問題に帰着されることになる．

問題 2.8　単連結閉 4 次元位相多様体 $k\mathbb{C}P^2\#\ell\overline{\mathbb{C}P^2}$, S^4, $m(K3)\#n(S^2\times S^2)$ および，その向きを逆にしたものは，標準的な微分構造以外の微分構造，すなわち，異種微分構造を常に許容するのか？

4 次元球面 S^4 の場合は，すでに述べた 4 次元微分ポアンカレ予想と本質的に等価な問題である．問題 2.8 に対して，最初に非自明な例を構成したのはドナルドソンであった．4 次元位相多様体 $\mathbb{C}P^2\#9\overline{\mathbb{C}P^2}$ に位相同型だが，微分同相ではない 4 次元多様体が存在することを証明したのである．これは飯高 - ドルガチェフ曲面とよばれる複素曲面が $\mathbb{C}P^2\#9\overline{\mathbb{C}P^2}$ に位相同型だが，微分同相でないことを証明することによって導かれた．微分同相でないことを

証明するために，4 次元多様体上の**反自己双対方程式**とよばれる非線形偏微分方程式の解空間の構造を深く解析した．さらに，この解空間を用いて 4 次元多様体の新しい微分同相不変量を構成した．この不変量は現在，**ドナルドソン不変量** [11] とよばれている．ドナルドソンのこれらの仕事が突破口となり，問題 2.8 に関して多くのことが知られるようになった．

さらに，1994 年にドナルドソン不変量の周辺で大きな進展があった．ドナルドソン不変量の構成には反自己双対方程式の解空間という数学的に簡単でないものを使うため，具体的な計算が困難であった．物理学者であるウイッテン (E. Witten) [66] は，同じく物理学者であるサイバーグ (N. Seiberg) との共同研究をもとに物理的考察から，反自己双対方程式とは異なる新たな非線形偏微分方程式を見出し，その方程式の解空間を使うことで新しい微分同相不変量を構成した．その方程式を**サイバーグ - ウイッテン方程式**，さらにその新しい不変量を**サイバーグ - ウイッテン不変量**とよぶ．驚くべきことに，サイバーグ - ウイッテン不変量はドナルドソン不変量よりも計算がずっとやさしく，応用上数々のアドバンテージをもっている．たとえば，すでに述べた古田幹雄 [14] による 11/8 予想に関する結果はサイバーグ - ウイッテン方程式を使って証明された．また，ドナルドソンが証明した $\mathbb{C}P^2\#9\overline{\mathbb{C}P^2}$ の場合以後，ひとつの懸案の問題として，連結和の個数である整数 9 をもっと小さくできるか，ということがあった．この問題に対しても，サイバーグ - ウイッテン不変量を使ってたとえば次の結果が証明されている．

定理 2.9 ([2, 17])　4 次元位相多様体 $\mathbb{C}P^2\#3\overline{\mathbb{C}P^2}$ は無限に異なる微分構造を許容する．

では連結和の個数が多い場合はどうかというと，たとえば次の定理が，やはりサイバーグ - ウイッテン不変量を使って証明されている．

定理 2.10 ([53])　$k \geq 0$ および，$\ell \geq 1$ を満たす整数の対 (k, ℓ) の各々に対して，4 次元位相多様体 $(2k+2\ell-1)\mathbb{C}P^2 \# (2k+4\ell-1)\overline{\mathbb{C}P^2}$ は無限に異なる微分構造を許容する．

定理 2.9，定理 2.10 は交叉形式が I 型の場合（スピンでない場合）の異種微分構造の存在に関する結果である．II 型の場合（スピンの場合）はたとえば次の結果が知られている．

定理 2.11 ([26])　$m \geq 4$ を満たす各々の整数 m に対して，4 次元位相多様体 $m(K3)\#(m+1)(S^2 \times S^2)$ は無限に異なる微分構造を許容する．

$K3$ 曲面と連結和をとらない場合は，次の結果が知られている．

定理 2.12 ([52])　次の性質を満たす整数 N が存在する：$n \geq N$ を満たす任意の n に対して，4 次元位相多様体 $(2n+1)(S^2 \times S^2)$ は無限に異なる微分構造を許容する．

以上の結果をはじめとして，4 次元異種微分構造の存在について多くのことが知られている．たとえば，[1, 2, 17] を参照せよ．以上の意味で異種微分構造は 4 次元では決して特別なものではなく，むしろありふれていると言ってもよいだろう．

さて，4 次元の異種微分構造の歴史はドナルドソンによって反自己双対方程式が 4 次元トポロジーへ応用された 1980 年代初頭に始まったと言える．しかし，上記の定理 2.9，定理 2.10，定理 2.11，定理 2.12 は反自己双対方程式ではなく，サイバーグ - ウイッテン方程式を使って証明されている．このことから，時代はサイバーグ - ウイッテン方程式に取って代わられたように見える．しかし反自己双対方程式にまつわる幾何はまだまだ調べるべきことがあり，それ自身，興味深い研究対象である．さらに驚くべきことに，反自己双対方程式とサイバーグ - ウイッテン方程式は無関係ではなく，互いに密接に

関連し合っている．誤解を恐れずに言えば，反自己双対方程式なくして，サイバーグ - ウイッテン方程式は生まれない．両者の関係については次の節で簡単に触れる．なお，サイバーグ - ウイッテン方程式は本稿でも中心的な役割を果たすので，その導入も次節でおこなうことにしよう．

2.3　ドナルドソン不変量とサイバーグ - ウイッテン不変量

この節では技術的な細部には全くこだわらずに説明する．詳細を知りたい読者は，たとえば，[12, 20, 51, 13] を参照せよ．なお，モジュライ空間という用語が以下出てくるが，これについて平易な言葉で明快に解説してある論説として，たとえば，[21] がある．

X を $b_1(X) = 0$ を満たす閉 4 次元多様体とし，X 上のリーマン計量を固定する．$b^+(X) > 1$ とし，さらに奇数と仮定する．X 上の $SU(2)$ を構造群とする主束を考える．構造群が $SU(2)$ であることから，この主束は第 2 チャーン類とよばれる整数で分類されることが知られている．整数 k を固定して，$SU(2)$ 主束 $E_k \to X$ を考える．$E_k \to X$ の接続 A は，X 上の普通の外微分 d と $SU(2)$ のリー環 $su(2)$ に値をもつ X 上の 1 次微分形式 a を使い，$A = d + a$ と書ける．接続 A の曲率を $F_A = dA + A \wedge A$ と定義する．F_A はリー環 $su(2)$ に値をもつ X 上の 2 次微分形式になる．以下，リー環 $su(2)$ に値をもつ X 上の 2 次微分形式全体のなす空間を $\bigwedge^2(su(2))$ と書く．このときホッジスター作用素 $* : \bigwedge^2(su(2)) \to \bigwedge^2(su(2))$ を使って，$\bigwedge^2(su(2))$ を次のように直和分解することができる．

$$\bigwedge^2(su(2)) = \bigwedge^2_+ \oplus \bigwedge^2_-$$

ここで，$\bigwedge^2_+$ はホッジスター作用素で不変な部分である．この分解に応じて，接続 A の曲率 F_A も次の分解をもつ．

$$F_A = F_A^+ + F_A^- \in \bigwedge^2(su(2)) = \bigwedge_+^2 \oplus \bigwedge_-^2$$

F_A^+, F_A^- をそれぞれ曲率 F_A の自己双対成分，反自己双対成分とよぶ．$SU(2)$ 主束 $E_k \to X$ の接続 A が，**反自己双対** (anti-self-dual) とよばれるのは，その曲率 F_A の自己双対成分が消えてしまうときである．

$$F_A^+ = 0$$

これは X 上の非線形偏微分方程式であり，以下，**反自己双対方程式** (anti-self-dual equation) とよぶ．二つの反自己双対接続 A, A' がゲージ同値であるとは，$SU(2)$-同変な微分同相写像 $f : E_k \to E_k$ で底空間の恒等写像 $id : X \to X$ をカバーするものが存在して，A' が A を f で引き戻したものに等しいときをいう．このような微分同相写像は，ゲージ変換とよばれる．ゲージ変換全体を $\mathcal{G}$ と表すとき，反自己双対接続のモジュライ空間を反自己双対方程式の解空間の $\mathcal{G}$ による商空間として定義する．

$$\mathcal{M}_k := \{A \mid F_A^+ = 0\}/\mathcal{G}$$

ドナルドソンが4次元多様体の微分同相不変量を構成するのに使ったのはこの空間である．ゲージ群による商をとっているので，一般に $\mathcal{M}_k$ はきれいな構造をもつことを期待できない．そこで，既約とよばれるクラスの反自己双対接続に対して，上と同様にして既約反自己双対接続のモジュライ空間を考える．それを $\hat{\mathcal{M}}_k$ と書くことにする．$\hat{\mathcal{M}}_k$ を導入するためにリーマン計量を用いているが，ほとんどすべてのリーマン計量に対して $\hat{\mathcal{M}}_k$ は有限次元，向き付け可能な微分可能多様体の構造をもつことが知られている．次元を d_k で表す（これは偶数である）．一方，$\hat{\mathcal{M}}_k$ はコンパクトではない．しかし，ウーレンベックコンパクト化とよばれるコンパクト化 $\overline{\mathcal{M}_k}$ が存在し，これが基本ホモロジー類 $[\overline{\mathcal{M}_k}]$ をもつことが知られている．ドナルドソンは，X のホモ

ロジー類から $\overline{\mathcal{M}}_k$ のコホモロジー類への写像

$$\mu : H_2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\overline{\mathcal{M}}_k, \mathbb{Z})$$

を構成し，これを使って 4 次元多様体の微分同相不変量 $\gamma_k(X)$ を以下のように定義した．$e_k := d_k/2$ 個の $H_2(X, \mathbb{Z})$ の直積上の $\mathbb{Z}$ 値関数

$$\gamma_k(X) : H_2(X, \mathbb{Z}) \times H_2(X, \mathbb{Z}) \times \cdots \times H_2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

を次で定義する．

$$\begin{aligned}\gamma_k(X)(x_1, x_2, \cdots, x_{e_k}) &= \langle \mu(x_1) \cup \mu(x_2) \cup \cdots \cup \mu(x_{e_k}), [\overline{\mathcal{M}}_k] \rangle \\ &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_k} \mu(x_1) \wedge \mu(x_2) \wedge \cdots \wedge \mu(x_{e_k})\end{aligned}$$

反自己双対方程式を考えるにはリーマン計量を必要とするので，$\gamma_k(X)$ の定義はリーマン計量の取り方に依存しているように見える．しかし，驚くべきことにリーマン計量の取り方には依存しないことが知られている．このようにして整数 k に対して，X の微分同相不変量である $\gamma_k(X)$ が定義される．$\gamma_k(X)$ は X の**ドナルドソン不変量**，または**ドナルドソン多項式**とよばれている．

さて，ひとつの 4 次元多様体 X に対して，各整数 k ごとにドナルドソン不変量 $\gamma_k(X)$ が得られた．すなわち，X に対して無限個の不変量が得られたことになる．このとき，X には依存しない，これらの不変量の間に何か関係があるのかを調べることは，数学的に基本的な問題意識だと思われる．そこで，次の形式和 $\mathcal{D}_X$ を考える(この足しあげ方は厳密に言えば正確ではないのだが，簡単のためここではこのように書いておく)．

$$\mathcal{D}_X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma_k(X)$$

このとき，クロンハイマー (P.B. Kronheimer) とムロフカ (T. Mrowka) は 4 次元多様体に対して単純型 (simple type) という概念を導入し，単純型をも

つ4次元多様体 X に対しては $\mathcal{D}_X$ の構造が明快に記述できることを見出した [38]. すなわち，有限個のコホモロジー類 $K_1, K_2, \cdots, K_s \in H^2(X, \mathbb{Z})$ と有限個の有理数 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ が存在し，次が成立することを証明した.

$$\mathcal{D}_X = \exp\left(\frac{Q_X}{2}\right)\sum_{i=1}^{s} a_i \exp(K_i) \tag{2.1}$$

$\mathcal{D}_X$ は定義から無限級数だが，この結果はそれが有限のものでわかると主張している驚くべき結果である. (2.1) はドナルドソン不変量の構造定理とよばれている. また，有限個のコホモロジー類は**クロンハイマー - ムロフカ基本類**とよばれている. 数学的に自然な問題として，クロンハイマー - ムロフカ基本類および，有限個の有理数 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ の正体は何なのか，ということがあった. この問いに物理的な立場から解答（もしくは数学的な予想）を与えたのがウイッテン [66] である. ウイッテンは反自己双対方程式ではなく，サイバーグ - ウイッテン方程式と現在よばれている別の非線形偏微分方程式を考ればよいことを指摘した. これは，ドナルドソン不変量を使って定義された和 $\mathcal{D}_X$ を経路積分を使って表示し，電磁双対性という視点からこれと物理的に等価な理論としてサイバーグ - ウイッテン方程式を導き出すという方法による. 残念ながら，物理的な背景をここで説明するのは筆者の能力をはるかに超えるので，以下，サイバーグ - ウイッテン方程式を数学的に導入する. 物理的な背景を知りたい読者は，たとえば，[25, 59, 62] を参照せよ.

サイバーグ - ウイッテン方程式を導入するには，4次元多様体 X にスピン c 構造をまず与える必要がある. X が単連結な場合，スピン c 構造は，X の2次のコホモロジー $H^2(X, \mathbb{Z})$ の元 Γ_X で，任意の元 $x \in H_2(X, \mathbb{Z})$ に対して

$$\langle \Gamma_X, x \rangle \equiv x \cdot x \pmod 2$$

が成立するものに対応している. 以下，簡単のため X は単連結と仮定する. X のリーマン計量 g とスピン c 構造 Γ_X を取る. スピン c 構造 Γ_X に付随

して，二つのランク 2 の複素ベクトル束 $S^+_{\Gamma_X}$, $S^-_{\Gamma_X}$ と一つの複素直線束 $\mathcal{L}_{\Gamma_X}$ が定まることが知られている．**サイバーグ - ウイッテン方程式**とは，$\mathcal{L}_{\Gamma_X}$ の $U(1)$-接続 A と $S^+_{\Gamma_X}$ の滑らかな切断 ϕ の対 (A,ϕ) を変数とする次の非線形偏微分方程式のことをいう．

$$\mathcal{D}_A\phi = 0, \quad F_A^+ = q(\phi) \tag{2.2}$$

ここで，$D_A : \Gamma(S^+_{\Gamma_X}) \to \Gamma(S^-_{\Gamma_X})$ はリーマン計量 g のレビ - チビタ (Levi-Civita) 接続と接続 A から決まるディラック作用素，F_A^+ は $U(1)$-接続 A の曲率 F_A の自己双対成分，$q(\phi)$ は ϕ についての 2 次の項である．この方程式は，1994 年の暮れに，ウイッテン [66] により導入された．

サイバーグ - ウイッテン方程式 (2.2) の解空間には X から $U(1)$ への写像が自然に作用し，その作用による解空間の商空間を $\mathcal{M}_X(\Gamma_X)$ と書く．$\mathcal{M}_X(\Gamma_X)$ は，サイバーグ - ウイッテン モジュライ空間とよばれる．$b^+(X) > 0$ の仮定の下，サイバーグ - ウイッテン方程式や計量 g を摂動すると，$\mathcal{M}_X(\Gamma_X)$ は向き付け可能なコンパクト有限次元多様体となることが知られている．特に，その次元 d_{Γ_X} は次式で与えられる．

$$d_{\Gamma_X} = \frac{1}{4}\left(c_1^2(\mathcal{L}_{\Gamma_X}) - 2\chi(X) - 3\tau(X)\right)$$

ここで $c_1(\mathcal{L}_{\Gamma_X})$ は複素直線束 $\mathcal{L}_{\Gamma_X}$ の第 1 チャーン類であり $c_1^2(\mathcal{L}_{\Gamma_X})$ はその 2 乗，$\chi(X)$ はオイラー数，$\tau(X)$ は符号数である．さらに $\mathcal{M}_X(\Gamma_X) \neq \emptyset$ であるようなスピン c 構造 Γ_X は有限個であることも知られている．反自己双対接続のモジュライ空間の性質と決定的に異なる点は，$\mathcal{M}_X(\Gamma_X)$ のコンパクト性である．この点が反自己双対接続のモジュライ空間を使ったドナルドソン理論より，さまざまな点において議論を簡単化する原因の一つとなっている．

さて，反自己双対接続のモジュライ空間から構成されたドナルドソン不変量と同様にして，サイバーグ - ウイッテン モジュライ空間を使って 4 次元多

様体の微分同相不変量，すなわち，サイバーグ - ウイッテン不変量を構成することができる．

定義 2.1 ([66, 51])　X を $b^+(X) > 1$ を満たす 4 次元多様体とする．スピン c 構造 Γ_X に対するサイバーグ - ウイッテン不変量の値 $SW_X(\Gamma_X)$ を次のように定義する．

- $d_{\Gamma_X} < 0$ または，奇数の場合，$SW_X(\Gamma_X) = 0$ と定義する．
- $d_{\Gamma_X} = 0$ の場合，(サイバーグ - ウイッテン モジュライ空間は有限個の点の集合なので) $SW_X(\Gamma_X)$ をサイバーグ - ウイッテン モジュライ空間の（向き付きの）点の個数と定義する．
- $d_{\Gamma_X} > 0$ で偶数の場合，

$$SW_X(\Gamma_X) := \langle \mu^{\frac{d}{2}},\ [\mathcal{M}_X(\Gamma_X)] \rangle$$

ここで μ はサイバーグ - ウイッテン モジュライ空間 $\mathcal{M}_X(\Gamma_X)$ 上の自然な主 S^1 束の第 1 チャーン類，$[\mathcal{M}_X(\Gamma_X)]$ はサイバーグ - ウイッテン モジュライ空間の基本ホモロジー類である．

この定義により，サイバーグ - ウイッテン不変量 SW_X は X のスピン c 構造 (の同型類の) 集合から $\mathbb{Z}$ への写像を定義する．

$$SW_X : Spin^c(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

$SW_X(\Gamma_X) \neq 0$ を満たすスピン c 構造 Γ_X が存在するとき，X は非自明なサイバーグ - ウイッテン不変量をもつと言われる．またこのとき，第 1 チャーン類 $c_1(\mathcal{L}_{\Gamma_X}) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ を**サイバーグ - ウイッテン基本類**とよぶ．大雑把に言えば，サイバーグ - ウイッテン基本類が存在する場合，サイバーグ - ウイッテン方程式 (2.2) は解をもち，サイバーグ - ウイッテン基本類が存在しない場合，サイバーグ - ウイッテン方程式は解をもたない(そうでない場合もあるのだが，簡単のためここではこのように言いきってしまおう)．

さて，ドナルドソン不変量とサイバーグ - ウイッテン不変量の関係に関する予想として，クロンハイマー - ムロフカ基本類はサイバーグ - ウイッテン基本類であるとウイッテンは物理的考察から予想した．クロンハイマー - ムロフカ基本類の正体がわかればドナルドソン不変量の構造はわかると言ってよいので，ウイッテンのこの予想は，複雑なドナルドソン不変量がある意味でずっと簡単なサイバーグ - ウイッテン不変量と等価である，と言っている．正確には次の予想である．

予想 2.13　X を $b_1(X)=0$, $b^+(X)\geq 3$ を満たし，単純型をもつ 4 次元多様体とする．このとき次が成立する．

$$\mathcal{D}_X=\exp\left(\frac{Q_X}{2}\right)\sum_{i=1}^{s}2^{m(X)}SW_X(\Gamma_X^i)\exp\Big(c_1(\mathcal{L}_{\Gamma_X^i})\Big)$$

ただしここで

$$m(X)=2+\frac{1}{4}\big(7\chi(X)+11\tau(X)\big)$$

さらに，$c_1(\mathcal{L}_{\Gamma_X^i})$ は X のサイバーグ - ウイッテン基本類で次を満たすものである．

$$c_1^2(\mathcal{L}_{\Gamma_X^i})=2\chi(X)+3\tau(X) \tag{2.4}$$

この予想はある条件の下で数学的に正しいことが，論文 [16] でアナウンスされている．また，$b^+(X)>1$ を満たす 4 次元多様体 X が (2.4) を満たすようなサイバーグ - ウイッテン基本類しかもたないとき，サイバーグ - ウイッテン単純型をもつと言われる．$b^+(X)>1$ を満たす任意の 4 次元多様体 X はサイバーグ - ウイッテン単純型をもつ，と予想されている．シンプレクティック構造をもつ場合は解決されているが，筆者の知る限りそれを超える進展は何もなされていないようである．

2.4　異種微分構造とサイバーグ - ウイッテン方程式

サイバーグ - ウイッテン方程式の導入が終わったところで，ここでもう一度，異種微分構造の存在についての定理に話を戻す．定理 2.9，定理 2.10，定理 2.11，定理 2.12 の証明のポイントの一つは微分同相でないことをどうやって証明するのか，という点である．ここでサイバーグ - ウイッテン不変量が強力な道具として登場する．サイバーグ - ウイッテン不変量はドナルドソン不変量に比べて計算が容易にでき，たとえば次の結果のように，非常に広いクラスの多様体に対してその非自明性が証明されている．

定理 2.14 ([63])　$b^+(X) > 1$ を満たすシンプレクティック 4 次元多様体 X のサイバーグ - ウイッテン不変量は非自明．すなわち，サイバーグ - ウイッテン基本類が存在する．

4 次元多様体上の閉 2 次微分形式 ω で非退化，すなわち，$\omega \wedge \omega$ がいたるところ 0 でないものを**シンプレクティック形式**という．シンプレクティック形式をもつ 4 次元多様体をシンプレクティック 4 次元多様体とよぶ．

一方，次の消滅定理が知られている．

定理 2.15 ([66])　M, N を $b^+ \geq 1$ を満たす 4 次元多様体とする．このとき連結和 $M\#N$ のサイバーグ - ウイッテン不変量は消滅する．すなわち，サイバーグ - ウイッテン基本類は存在しない．

サイバーグ - ウイッテン不変量は微分同相不変量であるので，不変量の値が異なる多様体は微分同相ではあり得ない．したがって，たとえばこれらの定理から，$b^+(X) > 1$ を満たすシンプレクティック 4 次元多様体 X は $M\#N$ のような連結和には微分同相でないことが従う．定理 2.9，定理 2.10，定理 2.11，定理 2.12 のような異種微分構造の存在に関する結果の場合も，似たような雰囲気で証明が進む．M を 4 次元位相多様体，X, Y を 4 次元微分可能

多様体とする．X と Y は共に M に位相同型であるように構成するのだが，そのときに X はシンプレクティック構造を許容するように構成し，他方で Y は4次元多様体の連結和で構成するのである．そうすれば，上で述べたことより，X, Y は微分同相ではなくなる．同じことだが，4次元位相多様体 M は異なる微分構造 X, Y を許容することになる．微分構造の差をサイバーグ - ウイッテン不変量で測っているのである．2.3節で述べたが，非自明なサイバーグ - ウイッテン不変量をもつ場合，サイバーグ - ウイッテン方程式は解をもつ．一方，サイバーグ - ウイッテン不変量が消滅してしまう場合，サイバーグ - ウイッテン方程式は解をもたない．上で述べたことをサイバーグ - ウイッテン方程式の言葉で述べれば，4次元位相多様体 M はサイバーグ - ウイッテン方程式が解をもつような微分構造 X を許容するが，方程式が解をもたないような微分構造 Y も許容する，と表現できる．サイバーグ - ウイッテン方程式の解の存在，非存在が微分構造の取り方に依存しているのである．何でもないような性質だが，サイバーグ - ウイッテン方程式がもつこのような性質を抜き出して次の問題を考えてみる．

問題 2.16　解の存在，非存在が微分構造の取り方による現象は，4次元多様体上の他の幾何学的に興味のある非線形偏微分方程式に対しても起こる現象なのだろうか？

驚くべきことに，実際にこのような性質をもつ非線形偏微分方程式が，サイバーグ - ウイッテン方程式以外にも知られている．本稿の主目的は，この問題の非自明な例としてリッチフローを取り上げ解説することである．

2.5 正規化リッチフローの非特異解

(X,g) を閉 n 次元リーマン多様体とする．ここで，g はリーマン計量である．以下，$n=4$ の場合を特に考える．すでに第 1 章で導入したが，本稿では，リッチフローまたは，リッチフローの方程式で，計量の変形を記述する次の方程式のことをさすことにする．

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)}, \quad g(0) = g_0$$

リッチフローは時間に関して体積を一定に保たない．そこで，体積を一定に保つ，次の**正規化リッチフロー**を以下考える．

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)} + \frac{2}{n}\overline{s}_{g(t)}g(t), \quad g(0) = g_0 \tag{2.5}$$

ここで，s_g をリーマン計量 g のスカラー曲率としたとき，$\overline{s}_g := \int_X s_g d\mu_g / vol_g$ と定義される．また，$vol_g := \int_X d\mu_g$ である．時間 $t \in [0,T)$, $(0 < T \leq \infty)$ をパラメーターとする計量の族 $\{g(t)\}$ は方程式 (2.5) を満たすとき，正規化リッチフローの解であると言われる．ハミルトンは論文 [22] で，正のリッチ曲率をもつ 3 次元多様体上の正規化リッチフローの解は正の定曲率計量に収束する，という結果を証明しサーストンの幾何化予想へのリッチフローによるアプローチを創始した．

さて，正規化リッチフローの解のクラスの一つとして，**非特異** (non-singular solution) とよばれる非常によいクラスがある．たとえば，上で述べたハミルトンの結果は，正のリッチ曲率計量を初期計量に取ると正規化リッチフローは非特異解をもつ，と言い換えられる．この非特異性の概念はハミルトン [23] によって導入され，次のように述べられる ([8] も参照せよ)．

定義 2.2 ([23])　正規化リッチフローの解 $\{g(t)\}$, $t \in [0,T)$, が非特異とよばれるのは，解が時間無限大 $T=\infty$ まで存在し，さらに，解のリーマン曲率

が一様に押さえられるときである．

$$\sup_{X\times[0,\infty)} |Rm_{g(t)}| < \infty$$

正規化リッチフローは任意の初期計量に対して，時間局所解を常に許容することがわかっているのだが，一般に時間大域解の存在は期待できない．非特異解は曲率が一様に押さえられたまま時間無限大まで解が存在することを要求しているという意味で，非常に強い条件である．しかし，正規化リッチフローの性質を調べる上では，非常によいモデルを提供する．ペレルマンの驚異的な仕事 [55, 56, 57] が現れた今となっては，完全に過去の結果となってしまったが，ハミルトンは論文 [23] で 3 次元多様体上の正規化リッチフローの非特異解の構造を詳しく調べている．その結果は次の意味で，やはり幾何化予想にリッチフローが非常に有効であることを強く示唆するものであった．

定理 2.17 ([23])　Y を閉 3 次元多様体とする．Y 上の正規化リッチフローが非特異解をもてば，Y に対して幾何化予想が成立する．

誤解を恐れずに言えば，ペレルマンの仕事は，この定理から非特異解の曲率に関する強い条件を取り除いて究極的に一般化したものとも解釈できる．このように 3 次元では非特異解の構造は詳細に調べられているので，自然な問題意識として，4 次元以上の多様体上で正規化リッチフローの非特異解の性質を調べるということがあるだろう．

2.6　非特異解の存在に対する障害としての異種微分構造

さて 2.4 節で述べたように，本稿の目的は，問題 2.16 をリッチフローの場合に考察することである．考察する問題を正確に述べると次のようになる．

問題 2.18　4 次元位相多様体で少なくとも二つの微分構造を許容し，さらに一つの微分構造に関しては正規化リッチフローが，ある初期計量に対して非特異解を許容すると仮定する．このとき，他の微分構造に関しても正規化リッチフローはある初期計量に対して非特異解を常に許容するのだろうか？　すなわち，4 次元多様体上の正規化リッチフローの非特異解の存在，非存在は微分構造には依存せず，位相構造のみに依存するのか？

本稿の主結果は，次のように問題 2.18 に否定的に答える．すなわち，正規化リッチフローは問題 2.16 の性質を満たす非線形偏微分方程式である．

定理 2.19 ([30])　4 次元位相多様体 M で次の性質を満たすものが存在する．

1. M は，正規化リッチフローがある初期計量に対して非特異解をもつような微分構造を許容する．

さらに一方，

2. M は，正規化リッチフローが任意の初期計量に対して非特異解をもたないような微分構造も許容する．

この結果は，サイバーグ - ウイッテン方程式の場合と同様に，4 次元多様体上の正規化リッチフローの非特異解の存在，非存在が微分構造の取り方に依存していると主張している．このような定理を証明するための非自明な部分の一つは，どのような初期計量に対しても非特異解が存在しないことをどのようにして証明するか，という点である．これは，正規化リッチフローの非特異解の存在に対する何らかの意味での障害を証明することにより達成される．そのためには，一見全く無関係な次の二つの点をうまく融合させる必要がある．

- サイバーグ - ウイッテン方程式から誘導される，スカラー曲率などに関する評価

- 正規化リッチフローの方程式から誘導される，非特異解のリッチ曲率に関する評価

これらを融合させると，たとえば，次の結果を証明することができる.

定理 2.20 ([30])　X を $b^+(X) > 1$, $2\chi(X) + 3\tau(X) > 0$ を満たす任意のシンプレクティック 4 次元多様体とする．このとき

$$k > \frac{1}{3}\big(2\chi(X) + 3\tau(X)\big)$$

が成立すれば，連結和 $M := X\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ 上の正規化リッチフローは任意の初期計量に対して，非特異解を許容しない．すなわち，任意の初期計量に対して M 上の正規化リッチフローは常に特異点を発生させる.

定理 2.20 の仮定を満たすシンプレクティック 4 次元多様体は無限に存在するので，この定理は非常に広い範囲に適用できる.

以下，第 5 章の 5.3 節までを使って，定理 2.19 と定理 2.20 の証明のアイデアを厳密さにはあまりこだわらずに解説することにしよう.

3　サイバーグ-ウイッテン方程式と微分幾何学的不等式

3.1　モノポール類

X を 4 次元多様体とする．スピン c 構造 Γ_X に付随する複素直線束 $\mathcal{L}_{\Gamma_X}$ の第 1 チャーン類 $c_1(\mathcal{L}_{\Gamma_X}) \in H^2(X,\mathbb{Z})$ の $H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathbb{R})$ による像を $c_1^{\mathbb{R}}(\mathcal{L}_{\Gamma_X}) \in H^2(X,\mathbb{R})$ と書く．このとき，クロンハイマー [37] によって定義された，**モノポール類**という概念を導入する.

定義 3.1 ([37])　X を $b^+(X) \geq 2$ を満たす 4 次元多様体とする．$\mathfrak{a} \in H^2(X,\mathbb{R})$ が X のモノポール類とよばれるのは，次の性質をもつスピン c 構造 Γ_X が存在するときである.

1. $c_1^{\mathbb{R}}(\mathcal{L}_{\Gamma_X}) = \mathfrak{a}$

2. 任意の計量 g に対して，Γ_X と g に付随するサイバーグ - ウイッテン方程式

$$\mathcal{D}_A\phi = 0, \quad F_A^+ = q(\phi)$$

が解 (A, ϕ) をもつ．

特に，サイバーグ - ウイッテン基本類からモノポール類が得られることに注意せよ．$b^+(X) \geq 2$ を満たす 4 次元多様体 X のモノポール類全体の集合 $\mathfrak{C}(X)$ がもつ基本的な性質は，その有限性にある．

命題 3.1 ([26, 27, 45])　$\mathfrak{C}(X)$ は有限集合である．さらに $\mathfrak{C}(X) = -\mathfrak{C}(X)$ を満たす．すなわち，$\mathfrak{a} \in H^2(X, \mathbb{R})$ がモノポール類であれば $-\mathfrak{a} \in H^2(X, \mathbb{R})$ もモノポール類であり，逆も成立する．

$H^2(X, \mathbb{R})$ は実ベクトル空間であるが，定義から $\mathfrak{C}(X)$ はその部分集合である．$\mathfrak{C}(X)$ を含む最小の凸部分集合を $\mathbf{Hull}(\mathfrak{C}(X)) \subset H^2(X, \mathbb{R})$ と書く．$\mathfrak{C}(X)$ は有限集合であるので，$\mathfrak{C}(X) := \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_n\}$ と書くことにする．このとき

$$\mathbf{Hull}(\mathfrak{C}(X)) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j \mathfrak{a}_j \mid t_j \in [0, 1], \ \sum_{j=1}^{n} t_j = 1 \right\}$$

と表示できる．カップ積から誘導される関数

$$\mathcal{Q} : H^2(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{Q}(x) := x^2 := \langle x \cup x, [X] \rangle$$

を考える．ここで $[X]$ は X の基本ホモロジー類である．

定義 3.2　X を $b^+(X) \geq 2$ を満たす 4 次元多様体とする．$\mathfrak{C}(X) \neq \emptyset$ であれば

$$\beta^2(X) := \max\{\mathcal{Q}(x) := x^2 \mid x \in \mathbf{Hull}(\mathfrak{C}(X))\}$$

と定義する．一方，$\mathfrak{C}(X) = \emptyset$ であれば $\beta^2(X) := 0$ と定義する．

大雑把に言えば，サイバーグ - ウイッテン方程式が自明でない解をもつとき，$\beta^2(X)$ はゼロではない値をとる．以下，$\beta^2(X)$ を評価する必要があるのだが，そのためには，サイバーグ - ウイッテン方程式の解の存在，非存在を判定しなければならない．しかしながら，サイバーグ - ウイッテン方程式は非線形偏微分方程式であるので，一般に解の存在，非存在を判定することは容易でないと想像される．しかし，すでに解説したようにサイバーグ - ウイッテン方程式を使って，サイバーグ - ウイッテン不変量とよばれる，4 次元多様体の微分同相不変量を構成することができる．サイバーグ - ウイッテン不変量の非自明性，すなわち，サイバーグ - ウイッテン基本類の存在がわかれば，モノポール類の存在が判明する．たとえば，定理 2.14 より，$b^+ > 1$ を満たすシンプレクティック 4 次元多様体はモノポール類をもつ．この事実を使って次を証明することができる．

定理 3.2　X を $b^+(X) > 1$ を満たすシンプレクティック 4 次元多様体とする．このとき，連結和 $M := X \# k\overline{\mathbb{C}P^2}$ は次を満たす．

$$\beta^2(M) \geq 2\chi(X) + 3\tau(X)$$

一方，定理 2.15 より，$b^+ > 1$ を満たすシンプレクティック 4 次元多様体の二つ以上の連結和のサイバーグ - ウイッテン不変量は消滅してしまう．よってこの場合，モノポール類をもつかどうかをサイバーグ - ウイッテン不変量を使って判定することはできない．ここで注意すべきことは，サイバーグ - ウイッテン不変量の消滅性とモノポール類の非存在は同値ではない点である．そこで，4 次元多様体の連結和に対して，モノポール類の存在，非存在を判定する方法があるのかどうかが，ひとつの重要な問題となる．これにひとつの答えを与えるのが，古田幹雄 - バウアー (S. Bauer) [5, 6] により導入された**安定コホモトピー サイバーグ - ウイッテン不変量**である．この不変量は，サイバーグ - ウイッテン方程式を使って定義されるのだが，すでに述べたサイ

バーグ - ウイッテン不変量の構成とは本質的に異なる方法で定義される．ここでは深入りせずに簡単に説明する．これまでと同様に，X を $b^+(X) > 1$ を満たす 4 次元多様体とする．X のリーマン計量 g とスピン c 構造 Γ_X を取る．そのとき，これらに付随するサイバーグ - ウイッテン方程式は，$b_1 := b_1(X)$ 次元トーラス T^{b_1} 上の無限次元ベクトル束の間の S^1 同変な固有写像として解釈できることが知られている．

$$\mu_{\Gamma_X} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$$

この写像はサイバーグ - ウイッテン写像とよばれる．サイバーグ - ウイッテン モジュライ空間をサイバーグ - ウイッテン写像を使って表現すると商空間 $\mu_{\Gamma_X}^{-1}(0)/S^1$ となる．この意味で，サイバーグ - ウイッテン不変量はサイバーグ - ウイッテン写像のゼロ点集合の情報のみを使って定義されていることになり，写像そのものの情報をフルに使って定義されているわけではない．よって，サイバーグ - ウイッテン写像という視点から見ると，サイバーグ - ウイッテン不変量だけでは捕まえきれない情報があるはずだと想像できる．さて，サイバーグ - ウイッテン写像は，非常によい性質をもつ有限次元部分空間 V, W の間の写像 f_{Γ_X} によって近似できることが知られており，それはサイバーグ - ウイッテン写像の有限次元近似とよばれている．さらにその写像は，V, W の 1 点コンパクト化 V^+, W^+ の間の写像 $f_{\Gamma_X}^+ : V^+ \longrightarrow W^+$ を誘導し，そのホモトピー類 $[f_{\Gamma_X}^+]$ は X の微分同相不変量となることが知られている．厳密性を欠く非常に大まかな導入の仕方であるが，これを安定コホモトピー サイバーグ - ウイッテン不変量とよび，以下 BF_X と書くことにしよう．より正確には，スピン c 構造 Γ_X に対する安定コホモトピー サイバーグ - ウイッテン不変量の値 $BF_X(\Gamma_X)$ を次で定義する．

$$BF_X(\Gamma_X) = [f_{\Gamma_X}^+] \in \pi_{S^1}^{b^+}(Pic^0(X), indD)$$

ここで $\pi^{b^+}_{S^1}(Pic^0(X), indD)$ はある安定コホモトピー群である．安定コホモトピー サイバーグ - ウイッテン不変量は，$\mathbb{Z}$ に値をとるサイバーグ - ウイッテン不変量とは大きく異なり，安定コホモトピー群に値をとる．よって，構造がより複雑である．また，$BF_X(\Gamma_X)$ が非自明な元を定める場合，$c_1(\mathcal{L}_{\Gamma_X})$ は X のモノポール類であることが知られている．さらに，$BF_X(\Gamma_X)$ を $SW_X(\Gamma_X)$ に移す写像

$$\pi^{b^+}_{S^1}(Pic^0(X), indD) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

が定義できることも知られている．これにより，$SW_X(\Gamma_X)$ が非自明であれば，$BF_X(\Gamma_X)$ も非自明であることが従う．

さて，バウアー [6] は，安定コホモトピー サイバーグ - ウイッテン不変量に対する非消滅定理として次を証明している．

定理 3.3 ([6])　$i = 1, 2, 3, 4$ に対して，X_i を $b^+(X_i) > 1$ を満たす概複素 4 次元多様体とし，$b_1(X_i) = 0$ と仮定する．さらに概複素構造から来るスピン c 構造 Γ_{X_i} に対して，$SW_{X_i}(\Gamma_{X_i}) \equiv 1 \pmod 2$ と仮定する．このとき，以下の条件が成立すれば，連結和 $X := \#_{i=1}^{n} X_i$ は非自明な安定コホモトピー サイバーグ - ウイッテン不変量をもち，特にモノポール類をもつ．

- $n = 2, 3$ の場合，$b^+(X_i) \equiv 3 \pmod 4$．
- $n = 4$ の場合，$b^+(X_i) \equiv 3 \pmod 4$ および，$b^+(X) \equiv 4 \pmod 8$．

定理 3.3 は非常に重要なことを我々に語っている．すなわち，定理 2.15 により，$b^+ \geq 1$ を満たす任意の 4 次元多様体 X_1 と X_2 の連結和 $X_1 \# X_2$ に対してサイバーグ - ウイッテン不変量は消滅する．よってこのような連結和に対しては，モノポール類の存在，非存在を判定できないのであった．しかし，定理 3.3 は $b^+(X_i) \equiv 3 \pmod 4$ などの条件の下で，連結和に対しモノポール類が存在することを示しているのである．

さて，定理 3.3 を使って次を証明することができる．

定理 3.4　定理 3.3 の状況の下，さらに N を $b^+(N)=0$ を満たす，任意の 4 次元多様体とする．このとき，連結和 $M := (\#_{i=1}^n X_i)\#N$ は次を満たす．ただしここで，$n=2,3,4$ である．

$$\beta^2(M) \geq \sum_{i=1}^{n} 2\chi(X_i) + 3\tau(X_i)$$

再度，強調しておくが，この定理は サイバーグ - ウイッテン不変量だけを使っていては決して導き出すことはできない．

3.2　微分幾何学的不等式

この節では，サイバーグ - ウイッテン方程式から導出される微分幾何学的な情報を含む不等式について簡単に述べる．本質的にこれは，ルブラン (C. LeBrun) による一連の論文 [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45] で取り扱われた内容だが，より統一的な立場から説明することにしたい．上記の論文ではサイバーグ - ウイッテン方程式を使って一見異なる不等式がいくつか登場するのだが，以下登場する不等式 (3.1) からすべてを導き出せることが知られている．この意味で不等式 (3.1) はルブランの不等式を統一する不等式であると言える．

定理 3.5 ([28])　X を $b^+(X)>1$ を満たす閉 4 次元多様体，g を任意のリーマン計量とする．あるスピン c 構造 Γ_X に対して安定コホモトピー サイバーグ - ウイッテン不変量が消えないと仮定する．また ω を非自明な，g に関して自己双対な調和 2 次微分形式とし，それが定める de Rham 類を $[\omega]\in H^2(X,\mathbb{R})$ と書くことにする．このとき，$\delta\in[0,\frac{1}{3}]$ を満たす任意の実数 δ と計量 g に対して，次が成立する．

$$4\int_X |d\sqrt{|\omega|}| d\mu_g \leq 4\pi\sqrt{2}\, c_1(\mathcal{L}_{\Gamma_X})\cdot[\omega] + \int_X L(\delta, s_g, W_g^+)|\omega| d\mu_g \qquad (3.1)$$

ただしここで，次のように定義する．

$$L(\delta, s_g, W_g^+) := (1-\delta)|s_g| - \delta\sqrt{24}\,|W_g^+|$$

また，W_g^+ は計量 g のワイル曲率 W_g の自己双対成分，s_g は g のスカラー曲率である．

定理の証明は，サイバーグ - ウイッテン方程式そのものを使う非常に興味深いものであるが，ここでは省略する．特に，不等式 (3.1) の系として次が従う．

系 3.6 ([42])　X を $b^+(X) > 1$ を満たす閉 4 次元多様体，g を任意のリーマン計量とする．あるスピン c 構造 Γ_X に対して安定コホモトピー サイバーグ - ウイッテン不変量が消えないと仮定する．このとき，$\delta \in [0, \frac{1}{3}]$ を満たす任意の実数 δ と計量 g に対して次の不等式が成立する．

$$\int_X \left((1-\delta)|s_g| - \delta\sqrt{24}\,|W_g^+|\right)^2 d\mu_g \geq 32\pi^2 (c_1^+)^2 \tag{3.2}$$

ただしここで，c_1^+ は第 1 チャーン類 $c_1(\mathcal{L}_{\Gamma_X}) = c_1^+ + c_1^- \in H^2(X, \mathbb{R}) = \mathcal{H}_g^+ \oplus \mathcal{H}_g^-$ の自己双対成分 c_1^+ とする．またここで $\mathcal{H}_g^+$ は g に関して自己双対な調和 2 次微分形式のなす空間であり，同様に，$\mathcal{H}_g^-$ は g に関して反自己双対な調和 2 次微分形式のなす空間である．

証明　定理 3.5 の主張より不等式 (3.1) が成立する．特に不等式の左辺に現れる積分項は非負であるので，特殊な場合として次の不等式を得る．

$$0 \leq 4\pi\sqrt{2}\,c_1(\mathcal{L}_{\Gamma_X}) \cdot [\omega] + \int_X L(\delta, s_g, W_g^+)|\omega| d\mu_g$$

右辺の第 2 項に対してシュワルツ不等式を適用し，次の不等式を得る．

$$0 \leq 4\pi\sqrt{2}\,c_1(\mathcal{L}_{\Gamma_X}) \cdot [\omega] + \left(\int_X (L(\delta, s_g, W_g^+))^2 d\mu_g\right)^{1/2} \left(\int_X |\omega|^2 d\mu_g\right)^{1/2}$$

さて，$c_1(\mathcal{L}_{\Gamma_X}) = c_1^+ + c_1^-$ の自己双対成分 c_1^+ に対して，$-c_1^+$ を実現する自己双対な調和 2 次微分形式 ω，すなわち，$-c_1^+ = [\omega]$ を満たすものを取る．上の不等式にこれを代入することにより，次の不等式を得る．

$$0 \leq -4\pi\sqrt{2}(c_1^+)^2 + \left(\int_X (L(\delta, s_g, W_g^+))^2 d\mu_g\right)^{1/2} \sqrt{(c_1^+)^2}$$

$(c_1^+)^2 = \left(\sqrt{(c_1^+)^2}\right)^2$ であるから，この不等式は次を誘導する．

$$4\pi\sqrt{2}\sqrt{(c_1^+)^2} \leq \left(\int_X (L(\delta, s_g, W_g^+))^2 d\mu_g\right)^{1/2}$$

両辺を 2 乗して，ただちに証明すべき不等式を得る．ただしここで

$$L(\delta, s_g, W_g^+) := (1-\delta)|s_g| - \delta\sqrt{24}\,|W_g^+|$$

であることに注意せよ．　∎

不等式 (3.2) において $\delta = 0$ と $\delta = \frac{1}{3}$ の場合が，我々の目的のために特に重要な場合である．$\delta = 0$ の場合，次が従う．

$$\int_X s_g^2 d\mu_g \geq 32\pi^2 (c_1^+)^2$$

一方，$\delta = \frac{1}{3}$ の場合は次が成立する．

$$\int_X \left(\frac{2}{3}|s_g| - \frac{1}{3}\sqrt{24}\,|W_g^+|\right)^2 d\mu_g \geq 32\pi^2 (c_1^+)^2 \tag{3.3}$$

さらに，定義 3.2 で導入された $\beta^2(X)$ をも組み入れた次の不等式が従うことも知られている．

定理 3.7　X を $b^+(X) > 1$ を満たす閉 4 次元多様体とし，非自明な安定コホモトピー サイバーグ - ウイッテン不変量をもつと仮定する．このとき，任

意のリーマン計量 g は次の評価を満たす.

$$\int_X s_g^2 d\mu_g \geq 32\pi^2\beta^2(X)$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_X \left(2|W_g^+|^2 + \frac{s_g^2}{24}\right) d\mu_g \geq \frac{2}{3}\beta^2(X)$$

第 2 番目の不等式は，不等式 (3.3) から従うのだが，少し巧妙なことをやる必要があり，ここではその詳細は省略する．この二つの不等式は両方とも，すでに述べた定理 2.20 の証明の決定的な部分で使用される．

4　ペレルマン不変量と異種微分構造

リッチフローを何らかの汎関数の勾配流として解釈できれば，非常に見通しがよくなることもあり，リッチフローを適切な汎関数の勾配流と見なせるのかどうかはひとつの重要な問題となる．しかしすでにハミルトンによって考察されているように，リーマン計量の 2 階微分までを含む汎関数の勾配流としてリッチフローをとらえることは不可能であることが知られている．しかしながら，ペレルマンは論文 [55] において，多様体上の C^∞ 関数 f とリーマン計量 g の組に対する汎関数を導入することでこの困難を乗り越え，新しい視点を持ち込んだ．その汎関数は **$\mathcal{F}$-汎関数**とよばれている．リッチフローの $\mathcal{F}$-汎関数による勾配流解釈により，さまざまな応用がなされている．この節では，天下り的であるが，$\mathcal{F}$-汎関数に付随する微分同相不変量である，**ペレルマン不変量**の定義を述べる．さらに 4 次元の場合，微分構造の取り方によってペレルマン不変量の値が実際に変化していくことを説明する．その際に証明されるペレルマン不変量の評価が，定理 2.20 の証明に必要となる．

4.1 $\mathcal{F}$-汎関数，ペレルマン不変量，山辺不変量

n 次元 $(n \geq 3)$ 閉リーマン多様体 X 上のリーマン計量全体のなす集合を $\mathcal{R}_X$，X 上の C^∞ 関数全体のなす集合を $C^\infty(X)$ と書く．このとき **$\mathcal{F}$-汎関数** $\mathcal{F} : \mathcal{R}_X \times C^\infty(X) \to \mathbb{R}$ は次で定義される．

$$\mathcal{F}(g, f) := \int_X (s_g + |\nabla f|^2) e^{-f} d\mu_g$$

$\mathcal{F}$-汎関数は次のリッチフローの変種の下，単調非減少であることをペレルマンは証明している．

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2Ric_g, \quad \frac{\partial}{\partial t} f = -\Delta f - s_g + |\nabla f|^2$$

さらに，与えられたリーマン計量 g に対して，$\int_X e^{-f} d\mu_g = 1$ という制限の下，$\mathcal{F}$-汎関数は minimizer をもつことも知られている．この事実の下，λ-汎関数とよばれる次の汎関数 $\lambda : \mathcal{R}_X \longrightarrow \mathbb{R}$ を考える．

$$\lambda(g) := \inf_f \left\{ \mathcal{F}(g, f) \;\middle|\; \int_X e^{-f} d\mu_g = 1 \right\}$$

$\lambda(g)$ は $-4\Delta_g + s_g$ の最小固有値というスペクトル解釈をもつ量であることも知られている．この λ-汎関数を使ってスケール不変な幾何学的量

$$\lambda(g)(vol_g)^{2/n}$$

を考える．この量は，$\lambda(g) \leq 0$ の条件の下，リッチフローの軌道に沿って単調非減少であることが知られている．このとき，次の定義を導入しよう．

定義 4.1 ([55, 56, 35])　n 次元 $(n \geq 3)$ 閉リーマン多様体 X に対して，ペレルマン不変量を次で定義する．

$$\bar{\lambda}(X) = \sup_{g \in \mathcal{R}_X} \lambda(g)(vol_g)^{2/n}$$

ペレルマン不変量は，微分同相不変量である．

次に，ペレルマン不変量からはとりあえず離れて，**山辺不変量** [36, 60] とよばれる別の自然な汎関数から定義される微分同相不変量を導入する．この不変量は以下に見るように，ペレルマン不変量と密接に関連している．再び，n 次元 $(n \geq 3)$ 閉リーマン多様体 X 上のリーマン計量全体を $\mathcal{R}_X$ と表し，その上で正規化された**アインシュタイン - ヒルベルト汎関数** $E : \mathcal{R}_X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$E(g) := \frac{\int_X s_g \ d\mu_g}{\left(\int_X d\mu_g\right)^{\frac{(n-2)}{n}}}$$

を考える．この汎関数の臨界点はアインシュタイン計量である．アインシュタイン - ヒルベルト汎関数 E から X の微分同相不変量を構成することを考えるのだが，単純に $\mathcal{R}_X$ 上で汎関数 E の上限，もしくは下限をとると発散してしまうことが知られている．

$$\inf_{g \in \mathcal{R}_X} E(g) = -\infty, \quad \sup_{g \in \mathcal{R}_X} E(g) = +\infty$$

意味のある不変量を構成するには，リーマン計量全体で考えるのではなく，リーマン計量 g の共形類 $[g]$ に制限して考えるとよいことがわかっている．ここで共形類 $[g]$ は次で定義される．

$$[g] := \{e^{2f} \cdot g \mid f \in C^\infty(X)\}$$

このとき，次の共形不変量を導入しよう．

$$Y(X, [g]) := \inf_{h \in [g]} E(h)$$

この定数は共形類 $[g]$ の山辺定数とよばれている．山辺定数を実現するリーマン計量 $h \in [g]$ の存在問題が，**山辺の問題** [67] である．周知のように，山辺の問題は完全に解決されている．すなわち，各共形類 $[g]$ に対して，山辺

定数を実現する，**山辺計量**とよばれる計量 h が存在し，そのスカラー曲率 s_h は

$$s_h = Y(X, [g]) \cdot \left(\int_X d\mu_h \right)^{-2/n}$$

で与えられる．$E(g)$ はスケール不変なので，h が山辺計量ならば，そのスケールされた計量 $\hat{h}$ も山辺計量である．特に，体積が 1 であるような山辺計量を考えれば，そのスカラー曲率は山辺定数そのものに他ならない．

さて，X の共形類全体 $\mathfrak{C}(X)$ 上で山辺定数の上限をとることにより，山辺不変量が定義される．

定義 4.2 ([36, 60])　X を n 次元 $(n \geq 3)$ 閉リーマン多様体とする．このとき，X の山辺不変量を次で定義する．

$$\mathcal{Y}(X) := \sup_{[g] \in \mathfrak{C}(X)} Y(X, [g]) = \sup_{[g] \in \mathfrak{C}(X)} \left(\inf_{h \in [g]} E(h) \right).$$

山辺不変量は常に有限の値をもつことが知られている．特に，オーバン (T. Aubin) によって次の事実が証明されている．

$$\mathcal{Y}(X) \leq \mathcal{Y}(S^n) = Y(S^n, [g_0]) = E(g_0).$$

ここで g_0 は n 次元球面 S^n の標準計量である．さらに $\mathcal{Y}(X) > 0$ であることと，X が正スカラー曲率計量をもつことは同値であることも知られている．

一見したところ，ペレルマン不変量と山辺不変量の間には直接の関係はないように見える．しかし，これらの不変量の間には次のような密接な関係がある．

定理 4.1 ([3])　X を n 次元 $(n \geq 3)$ 閉リーマン多様体とする．このとき，次が成立する．

$$\bar{\lambda}(X) = \begin{cases} \mathcal{Y}(X) & \mathcal{Y}(X) \leq 0 \text{ の場合} \\ +\infty & \mathcal{Y}(X) > 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

4.2　ペレルマン不変量の評価

定理 2.20 の証明のために，4 次元多様体のペレルマン不変量の評価をする必要がある．その際に，カギの一つとなるのが定理 4.1 におけるペレルマン不変量と山辺不変量の等価性を使って証明される次の結果である．

命題 4.2　X を $\mathcal{Y}(X) \leq 0$ を満たす 4 次元多様体とする．このとき，次が成立する．

$$\bar{\lambda}(X) = -\Big(\inf_{g \in \mathcal{R}_X} \int_X |s_g|^2 d\mu_g\Big)^{1/2}$$

この命題とサイバーグ - ウイッテン方程式を使って，ペレルマン不変量の評価をすることができる．それを以下，簡単に説明しよう．X を，$b_2^+(X) > 1$ を満たすシンプレクティック 4 次元多様体とし，連結和 $M := X \# k\overline{\mathbb{C}P^2}$ を考える．このとき M はシンプレクティック 4 次元多様体であるので，定理 2.14 より M のサイバーグ - ウイッテン不変量は非自明である．特に，M はモノポール類をもっている．これから，特に M は正スカラー曲率計量をもち得ないことが従う．これは，正スカラー曲率計量が存在すれば，モノポール類が存在しないことが知られているからである [66]．したがって M の山辺不変量はゼロ以下である．したがって命題 4.2 により，連結和 M のペレルマン不変量は次で与えられる．

$$\bar{\lambda}(M) = -\Big(\inf_{g \in \mathcal{R}_M} \int_M s_g^2 d\mu_g\Big)^{1/2} \tag{4.1}$$

一方，サイバーグ - ウイッテン不変量の非自明性は安定コホモトピー サイバーグ - ウイッテン不変量の非自明性を誘導することに注意すると，定理 3.7 から M 上の任意のリーマン計量 g は次の評価を満たすことが従う．

$$\int_M s_g^2 d\mu_g \geq 32\pi^2 \beta^2(M)$$

さらに定理 3.2 から，

$$\beta^2(M) \geq 2\chi(X) + 3\tau(X)$$

が成立する．以上より，M 上の任意のリーマン計量 g は

$$\int_M s_g^2 d\mu_g \geq 32\pi^2\big(2\chi(X) + 3\tau(X)\big)$$

を満たしている．リーマン計量 g は任意なので，これは次を導く．

$$\inf_{g\in\mathcal{R}_M} \int_M s_g^2 d\mu_g \geq 32\pi^2\big(2\chi(X) + 3\tau(X)\big)$$

この評価と (4.1) より，次が従う．

$$\bar{\lambda}(M) \leq -4\pi\sqrt{2\big(2\chi(X) + 3\tau(X)\big)} \tag{4.2}$$

このように，サイバーグ - ウイッテン方程式を使って，シンプレクティック 4 次元多様体のペレルマン不変量の上からの評価ができる．同様の手法を定理 3.4 と組み合わせることで，次も証明できる．

定理 4.3　定理 3.3 の状況の下，さらに N を $b^+(N) = 0$ を満たす，任意の 4 次元多様体とする．このとき，連結和 $M := (\#_{i=1}^n X_i)\#N$ のペレルマン不変量は次を満たす．ただしここで，$n = 2, 3, 4$ である．

$$\bar{\lambda}(M) \leq -4\pi\sqrt{2\sum_{i=1}^{n}\big(2\chi(X_i) + 3\tau(X_i)\big)}$$

これらの 4 次元多様体のペレルマン不変量の評価は，主張そのものも興味深いが，定理 2.20 を証明する際にも重要である．さらにこれらの結果を使って，微分構造の取り方によってペレルマン不変量の値が変わっていく例を構成することができる．これを次に説明したい．

4.3　微分構造とペレルマン不変量の変化

前節で紹介したペレルマン不変量の評価に関する結果はいずれも，ペレルマン不変量が上から多様体の位相不変量で押さえられることを主張している．一方，すでに解説したように 4 次元には位相構造は同じでも微分構造が異なる多様体が存在する．ペレルマン不変量は微分同相不変量であるので，位相構造が固定されていたとしても微分構造が変化すれば，その値は一般に変化し得る．実際，前節で説明したペレルマン不変量の評価を使って，たとえば，次の結果を証明することができる．

定理 4.4　4 次元位相多様体 $3K3\#4(S^2\times S^2)$ は次の 3 種類の異なる微分構造を許容する．

1. $\overline{\lambda}(X_1)=0$ となるような微分構造 X_1
2. $\overline{\lambda}(X_2)=-16\pi$ となるような微分構造 X_2
3. $\overline{\lambda}(X_i)\le -16\sqrt{2}\pi$ $(<-16\pi)$ となるような無限に異なる微分構造 X_i

ここで $3K3$ は $K3$ 曲面の三つの連結和 $K3\#K3\#K3$ を表す．この定理の証明の詳細は省略するが，連結和 $3K3\#4(S^2\times S^2)$ の標準的な微分構造が $\overline{\lambda}(X_1)=0$ となるような微分構造 X_1 である．一方，X_2 は一般型代数曲面とよばれる 2 次元複素多様体として実現される．このとき，$\overline{\lambda}(X_2)=-16\pi$ であることは，不等式 (4.2) の等号成立の場合を考察することにより証明される．さらに，X_i は連結和で実現される．具体的には，クンマー曲面とよばれる楕円曲面に対数変換を施したものを M_i とするとき，$M_i\#2K3\#4(S^2\times S^2)$ が X_i である．$\overline{\lambda}(X_i)\le -16\sqrt{2}\pi$ であることは定理 4.3 を使って証明される．

5　異種微分構造と正規化リッチフローの非特異解

5.1　正規化リッチフローから誘導される曲率の評価

定理 2.20 を証明するためには，これまでに解説してきたサイバーグ - ウイッテン方程式から導出される微分幾何学的不等式および，ペレルマン不変量の評価だけでは不十分である．さらに，正規化リッチフローの方程式から誘導されるリッチ曲率に関する評価が必要となる．この節ではこの評価を簡単に説明したい．

次の結果は，本質的に，正規化リッチフローの方程式を使って証明される．

補題 5.1 ([23, 15])　X を n 次元 $(n \geq 3)$ 閉リーマン多様体とする．X 上の正規化リッチフローに非特異解 $\{g(t)\}$, $t \in [0, \infty)$, が存在し，さらにその非特異解は次の評価を満たすと仮定する．

$$\hat{s}_{g(t)} := \min_{x \in X} s_{g(t)}(x) \leq -c < 0$$

ただしここで，c は時間 t にはよらない定数とする．このとき次の二つの評価が成立する．

$$\int_0^{\infty} \left(\overline{s}_{g(t)} - \hat{s}_{g(t)}\right) dt < \infty$$

$$\int_0^{\infty} \int_X |s_{g(t)} - \overline{s}_{g(t)}| d\mu_{g(t)} dt \leq 2 vol_{g(0)} \int_0^{\infty} \left(\overline{s}_{g(t)} - \hat{s}_{g(t)}\right) dt < \infty$$

ただしここで，$\overline{s}_{g(t)} := \int_X s_{g(t)} d\mu_{g(t)} / vol_{g(t)}$.

この補題は，正規化リッチフローの（非特異）解が満たす，スカラー曲率に関する次の方程式

$$\frac{\partial s_{g(t)}}{\partial t} = \Delta s_{g(t)} + 2 |\overset{\circ}{r}_{g(t)}|^2 + \frac{2}{n} s_{g(t)} \left(s_{g(t)} - \overline{s}_{g(t)}\right)$$

を使って証明される．この補題を使って次の定理が証明される．

定理 5.2 ([15, 30])　X を n 次元 $(n \geq 3)$ 閉リーマン多様体とする．X 上の正規化リッチフローに非特異解 $\{g(t)\}$, $t \in [0, \infty)$, が存在し，さらにその非特異解は次の評価を満たすと仮定する．

$$\hat{s}_{g(t)} := \min_{x \in X} s_{g(t)}(x) \leq -c < 0 \tag{5.1}$$

ただしここで，c は時間 t にはよらない定数とする．このとき，非特異解のリッチ曲率の trace-free 部分 $\overset{\circ}{r}_{g(t)}$ は次を満たす．

$$\int_0^\infty \int_X |\overset{\circ}{r}_{g(t)}|^2 d\mu_{g(t)} dt < \infty \tag{5.2}$$

特に $m \to \infty$ のとき，次が従う．

$$\int_m^{m+1} \int_X |\overset{\circ}{r}_{g(t)}|^2 d\mu_{g(t)} dt \longrightarrow 0 \tag{5.3}$$

定理 5.2 は，我々の目的のためには非常に重要な結果であるが，実際に使うために，条件 (5.1) がどのような状況で満たされるのかを調べる必要がある．次の補題は，ペレルマン不変量が負であるような多様体に対しては，条件 (5.1) が常に成立していることを主張する．

補題 5.3 ([30])　X を n 次元 $(n \geq 3)$ 閉リーマン多様体とする．さらに，X のペレルマン不変量が負と仮定する．$\{g(t)\}$, $t \in [0, T)$, を正規化リッチフローの解とする．このとき，解のスカラー曲率は次の評価を満たす．

$$\hat{s}_{g(t)} := \min_{x \in X} s_{g(t)}(x) \leq \frac{\bar{\lambda}(X)}{(vol_{g(0)})^{2/n}} < 0$$

ここで，$\bar{\lambda}(X)$, $vol_{g(0)}$ は共に時間にはよらない定数であることに注意せよ．この補題は次のように簡単に証明できる．

証明　$\{g(t)\}$ を X 上の正規化リッチフローの解とする．このとき，時間 t における $g(t)$ に関する $\lambda(g(t))$ は $-4\Delta_{g(t)} + s_{g(t)}$ の最小固有値ととらえるこ

とができたので，Rayleigh 商の言葉で次のように表現できる．

$$\lambda(g(t)) = \inf_u \frac{\int_X \left[s_{g(t)}u^2 + 4|\nabla u|^2\right] d\mu_{g(t)}}{\int_X u^2 d\mu_{g(t)}}$$

ただしここで，下限は X 上の実数値 C^∞ 関数全体でとる．これから，$\hat{s}_{g(t)} := \min_{x\in X} s_{g(t)}(x)$ であることに注意すると，次が従う．

$$\begin{aligned}\lambda(g(t)) &= \inf_u \frac{\int_X \left[s_{g(t)}u^2 + 4|\nabla u|^2\right] d\mu_{g(t)}}{\int_X u^2 d\mu_{g(t)}} \\ &\geq \inf_u \frac{\int_X \left[\hat{s}_{g(t)}u^2 + 4|\nabla u|^2\right] d\mu_{g(t)}}{\int_X u^2 d\mu_{g(t)}} \\ &\geq \hat{s}_{g(t)}\left(\inf_u \frac{\int_X u^2 d\mu_{g(t)}}{\int_X u^2 d\mu_{g(t)}}\right) = \hat{s}_{g(t)}\end{aligned}$$

よって，$\lambda(g(t)) \geq \hat{s}_{g(t)}$ が成立する．一方，ペレルマン不変量の定義より

$$\overline{\lambda}(X) \geq \lambda(g(t))(vol_{g(t)})^{2/n}$$

が従う．したがって，次を得る．

$$\overline{\lambda}(X) \geq \hat{s}_{g(t)}(vol_{g(t)})^{2/n}$$

さらに，正規化リッチフローは体積を時間に関して一定に保つので，特に $vol_{g(t)} = vol_{g(0)}$ が成立する．以上より

$$\overline{\lambda}(X) \geq \hat{s}_{g(t)}(vol_{g(0)})^{2/n}$$

が従う．これは，証明すべき不等式に他ならない．

$$\hat{s}_{g(t)} \leq \frac{\overline{\lambda}(X)}{(vol_{g(0)})^{2/n}} < 0$$

∎

この補題とサイバーグ - ウイッテン方程式を使って証明されたペレルマン不変量の評価 (4.2) から次が従う．

命題 5.4 ([30])　X を $b^+(X) > 1,\ 2\chi(X) + 3\tau(X) > 0$ を満たすシンプレクティック4次元多様体とする．このとき，連結和 $X\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ 上の正規化リッチフローの解 $\{g(t)\}$ に対して次が成立する．

$$\hat{s}_{g(t)} := \min_{x \in X} s_{g(t)}(x) \leq -\Big(\frac{4\pi\sqrt{2(2\chi(X)+3\tau(X))}}{(vol_{g(0)})^{1/2}}\Big) < 0$$

この命題と定理5.2より，次を得る．

定理 5.5　X を $b^+(X) > 1, 2\chi(X)+3\tau(X) > 0$ を満たすシンプレクティック4次元多様体とする．$X\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ 上の正規化リッチフローに非特異解 $\{g(t)\}$, $t \in [0,\infty)$, が存在すると仮定する．このとき，非特異解のリッチ曲率の trace-free 部分 $\overset{\circ}{r}_{g(t)}$ は次を満たす．

$$\int_0^\infty \int_X |\overset{\circ}{r}_{g(t)}|^2 d\mu_{g(t)} dt < \infty$$

特に $m \to \infty$ のとき，次が従う．

$$\int_m^{m+1} \int_X |\overset{\circ}{r}_{g(t)}|^2 d\mu_{g(t)} dt \longrightarrow 0 \tag{5.4}$$

5.2　非特異解の存在に対する障害

これまでに準備してきたことを使って，非特異解の存在に対する障害を証明する．すなわち，定理2.20を証明しよう．最初に，4次元特有のいくつかの事実を述べる．X を任意の4次元多様体とする．このとき，X の符号数 $\tau(X) := b^+(X) - b^-(X)$ はワイル曲率を用いて次のように表示できることが知られている．

$$\tau(X) = \frac{1}{12\pi^2}\int_X (|W_g^+|^2 - |W_g^-|^2) d\mu_g$$

ここで g は X の任意のリーマン計量であり，W_g^+ は計量 g のワイル曲率の自己双対成分，W_g^- は計量 g のワイル曲率の反自己双対成分である．同様

に，X のオイラー数 $\chi(X) := 2 - 2b_1(X) + b_2(X)$ も任意のリーマン計量 g を使って

$$\chi(X) = \frac{1}{8\pi^2}\int_X \left(|W_g^+|^2 + |W_g^-|^2 + \frac{s_g^2}{24} - \frac{|\overset{\circ}{r}_g|^2}{2}\right)d\mu_g$$

と表示できることも知られている．再度，ここで s_g は g のスカラー曲率，$\overset{\circ}{r}_g$ はリッチ曲率 r_g の trace-free 部分を表す. これらの公式より，4 次元多様体 X 上の任意の計量 g に対して次が成立することになる [24, 64].

$$2\chi(X) + 3\tau(X) = \frac{1}{4\pi^2}\int_X \left(2|W_g^+|^2 + \frac{s_g^2}{24} - \frac{|\overset{\circ}{r}_g|^2}{2}\right)d\mu_g \tag{5.5}$$

さて，X をシンプレクティック 4 次元多様体とし，連結和 $M := X\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ を考える．M 上の正規化リッチフローに非特異解 $\{g(t)\}$, $t \in [0,\infty)$, が存在するような初期計量が存在したと仮定する．このとき (5.5) より次が従う．

$$2\chi(M) + 3\tau(M) = \frac{1}{4\pi^2}\int_M \left(2|W_{g(t)}^+|^2 + \frac{s_{g(t)}^2}{24} - \frac{|\overset{\circ}{r}_{g(t)}|^2}{2}\right)d\mu_{g(t)}$$

これを時間 t に関して積分することで次式を得る．

$$\begin{aligned} 2\chi(M) + 3\tau(M) &= \int_m^{m+1} \big(2\chi(M) + 3\tau(M)\big)dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_m^{m+1}\left[\int_M \left(2|W_{g(t)}^+|^2 + \frac{s_{g(t)}^2}{24} - \frac{|\overset{\circ}{r}_{g(t)}|^2}{2}\right)d\mu_{g(t)}\right]dt \end{aligned}$$

直接計算により $2\chi(M) + 3\tau(M) = 2\chi(X) + 3\tau(X) - k$ が従うので，次の等式を得ることができる．

$$2\chi(X) + 3\tau(X) - k = \frac{1}{4\pi^2}\int_m^{m+1}\left[\int_M \left(2|W_{g(t)}^+|^2 + \frac{s_{g(t)}^2}{24} - \frac{|\overset{\circ}{r}_{g(t)}|^2}{2}\right)d\mu_{g(t)}\right]dt$$

定理 2.20 の証明のカギは，この等式の右辺の量を評価することにある．大雑把に言うと，右辺の $W_{g(t)}^+$ と $s_{g(t)}$ の 2 項を含む部分はサイバーグ - ウイッテン方程式から誘導される評価を使って処理し，$\overset{\circ}{r}_{g(t)}$ を含む最後の項に関して

は，前節で説明した正規化リッチフローの方程式から誘導される評価を使って処理する，ということになる．定理2.20と同じ主張をここで書いておく．

定理 5.6 ([30])　X を $b^+(X)>1$, $2\chi(X)+3\tau(X)>0$ を満たす任意のシンプレクティック4次元多様体とする．このとき

$$k > \frac{1}{3}\big(2\chi(X)+3\tau(X)\big) \tag{5.6}$$

が成立すれば，連結和 $M := X\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ 上の正規化リッチフローは任意の初期計量に対して，非特異解を許容しない．すなわち，任意の初期計量に対して M 上の正規化リッチフローは常に特異点を発生させる．

証明　M 上の正規化リッチフローに非特異解 $\{g(t)\}$, $t\in[0,\infty)$, が存在するような初期計量が存在したと仮定する．このときすでに述べたように，次が成立する．

$$2\chi(X)+3\tau(X)-k = \frac{1}{4\pi^2}\int_m^{m+1}\Big[\int_M\Big(2|W^+_{g(t)}|^2+\frac{s^2_{g(t)}}{24}-\frac{|\overset{\circ}{r}_{g(t)}|^2}{2}\Big)d\mu_{g(t)}\Big]dt$$

一方，定理5.5より $m\to\infty$ のとき，次が従う．

$$\int_m^{m+1}\int_X |\overset{\circ}{r}_{g(t)}|^2 d\mu_{g(t)}dt \longrightarrow 0$$

したがって，次の等式を得る．

$$2\chi(X)+3\tau(X)-k = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{4\pi^2}\int_m^{m+1}\Big[\int_M\Big(2|W^+_{g(t)}|^2+\frac{s^2_{g(t)}}{24}\Big)d\mu_{g(t)}\Big]dt$$

さらに，定理3.7の第2番目の不等式と定理3.2によって，M 上の任意のリーマン計量 g は次の評価を満たす．

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_M\Big(2|W^+_g|^2+\frac{s^2_g}{24}\Big)d\mu_g \ge \frac{2}{3}\big(2\chi(X)+3\tau(X)\big)$$

以上より，次が得られる．

$$
\begin{aligned}
2\chi(X)+3\tau(X)-k &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{4\pi^2}\int_m^{m+1}\left[\int_M\left(2|W^+_{g(t)}|^2+\frac{s^2_{g(t)}}{24}\right)d\mu_{g(t)}\right]dt\\
&\geq \lim_{m\to\infty}\frac{2}{3}\int_m^{m+1}\bigl(2\chi(X)+3\tau(X)\bigr)dt\\
&= \frac{2}{3}\bigl(2\chi(X)+3\tau(X)\bigr)
\end{aligned}
$$

したがって，次式を得る．

$$
2\chi(X)+3\tau(X)-k\geq\frac{2}{3}\bigl(2\chi(X)+3\tau(X)\bigr)
$$

まとめると，次の不等式が従う．

$$
k\leq\frac{1}{3}\bigl(2\chi(X)+3\tau(X)\bigr)
$$

正規化リッチフローが非特異解を許容するような初期計量が存在すると仮定してこの不等式が成立したので，(5.6) の下では，任意の初期計量に対して，非特異解は存在しない．∎

定理 5.6 は，$b^+>1$ の場合の結果であるが，$b^+=1$ の場合にも類似した結果が成立するのかどうかは興味深い問題である．$b^+>1$ と $b^+=1$ の差は証明に使われるサイバーグ - ウイッテン不変量の定義にまつわる技術的な差であるのだが，$b^+=1$ の場合も類似の方法を使って，次の結果を証明できる．

定理 5.7 ([34])　X を $b^+(X)=1$, $2\chi(X)+3\tau(X)>0$ を満たす 4 次元多様体とし，非自明なサイバーグ - ウイッテン不変量をもつと仮定する．また，N を $b_1(N)=b^+(N)=0$ を満たす任意の閉 4 次元多様体とする．このとき

$$
b_2(N)>\frac{1}{3}\bigl(2\chi(X)+3\tau(X)\bigr)
$$

が成立すれば，連結和 $M:=X\#N$ 上の正規化リッチフローは任意の初期計量に対して，非特異解をもたない．

特に，$N := k\overline{\mathbb{C}P^2}$ は $b_1(N) = b^+(N) = 0$ を満たすので，次の系を得る.

系 5.8　X を $b^+(X) = 1$, $2\chi(X) + 3\tau(X) > 0$ を満たす 4 次元多様体とし，非自明なサイバーグ - ウイッテン不変量をもつと仮定する．このとき

$$k > \frac{1}{3}\big(2\chi(X) + 3\tau(X)\big) \tag{5.7}$$

が成立すれば，連結和 $M := X\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ 上の正規化リッチフローは任意の初期計量に対して，非特異解を許容しない．すなわち，任意の初期計量に対して M 上の正規化リッチフローは常に特異点を発生させる.

5.3　非特異解の存在，非存在と微分構造

この節では，系 5.8 を応用し，正規化リッチフローの非特異解の存在，非存在が微分構造の取り方に依存している 4 次元位相多様体が存在することを見る．そして，そのことにより，定理 2.19 を証明しよう．正確には，次の定理が成立することを解説したい.

定理 5.9　$5 \leq k \leq 8$ に対して，4 次元位相多様体 $M := \mathbb{C}P^2\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ は正規化リッチフローの非特異解が存在するような微分構造を少なくとも二つ許容するが，非特異解が存在しないような微分構造を無限に許容する.

まず，非特異解の存在を証明するためにティアン (G. Tian) の結果を思いだす.

定理 5.10 ([65])　複素曲面 $M := \mathbb{C}P^2\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ がケーラー - アインシュタイン計量をもつための必要十分条件は $3 \leq k \leq 8$ である.

ケーラー計量であると同時にアインシュタイン計量でもあるリーマン計量を**ケーラー - アインシュタイン計量**とよぶ．本稿では深入りしないが，この方面の読みやすい論説として，たとえば，[49] がある.

一方，異種微分構造の存在に関する次の結果が知られている．

定理 5.11 ([9, 54, 58])　豊富な標準束をもつ一般型代数曲面 X で，複素曲面 $M := \mathbb{C}P^2\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ に位相同型だが微分同相でないものが存在する．ただしここで，$5 \leq k \leq 8$.

オーバン [4]，ヤウ (S.T. Yau) [68] による，負のチャーン類をもつケーラー - アインシュタイン計量の存在に関するカラビ予想の解決により，豊富な標準束をもつ一般型代数曲面はケーラー - アインシュタイン計量を許容することがわかる．この事実とアインシュタイン計量は正規化リッチフローの非特異解であることに注意すると，定理 5.10 と定理 5.11 より次が従う．

系 5.12　$5 \leq k \leq 8$ に対して，4 次元位相多様体 $M := \mathbb{C}P^2\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ は正規化リッチフローの非特異解が存在するような微分構造を少なくとも二つ許容する．

この系により，定理 5.9 の主張の非特異解の存在の部分は証明されたことになる．一方，非存在の部分を証明するために，系 5.8 と次の定理を使う．

定理 5.13 ([1])　次の性質を満たす 4 次元多様体の無限族 $\{X_i\}$ が存在する．

1. 各 X_i は，複素曲面 $M := \mathbb{C}P^2\#2\overline{\mathbb{C}P^2}$ に位相同型だが，微分同相ではない．
2. 各 X_i のサイバーグ - ウイッテン不変量は非自明であり，$i \neq j$ に対して，X_i と X_j は微分同相ではない．

この定理より，4 次元位相多様体 $\mathbb{C}P^2\#2\overline{\mathbb{C}P^2}$ は無限に異なる微分構造を許容することになる．この無限列 X_i に対して次の連結和を考える．

$$M_i := X_i\#(k-2)\overline{\mathbb{C}P^2}$$

ただしここで，$5 \leq k \leq 8$ である．X_i は，$\mathbb{C}P^2\#2\overline{\mathbb{C}P^2}$ に位相同型なので，M_i は $\mathbb{C}P^2\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ に位相同型であることに注意せよ．さらに，各 X_i のサイ

バーグ - ウイッテン不変量が非自明であることと，$i \neq j$ に対して X_i と X_j は微分同相ではないことより，$i \neq j$ に対して M_i と M_j も微分同相ではないことを証明することができる．この無限列 M_i に対して系 5.8 を使うことで非特異解が存在しないことが従う．すなわち，$5 \leq k \leq 8$ であることと，X_i は $\mathbb{C}P^2\#2\overline{\mathbb{C}P^2}$ に位相同型であることを使うと，次の自明な不等式が成立することがただちにわかる．

$$k - 2 > \frac{1}{3}\big(2\chi(X_i) + 3\tau(X_i)\big) = \frac{7}{3}$$

一方，系 5.8 より $M_i := X_i\#(k-2)\overline{\mathbb{C}P^2}$ はこの不等式が成立すれば非特異解は存在しない．まとめると，$5 \leq k \leq 8$ に対して，4 次元位相多様体 $M := \mathbb{C}P^2\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ は非特異解が存在しないような微分構造を無限に許容することになる．以上の方法で，定理 5.9 が証明される．

さて，定理 5.9 のような性質をもつ 4 次元位相多様体のさまざまな例を他にも構成できる．定理 5.9 で登場した $\mathbb{C}P^2\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ はスピンでないが，スピン多様体の場合も例を構成できることが知られている．さらに一般的な存在定理として次の定理が証明できる．

定理 5.14 ([30])　任意の正の整数 ℓ に対して，単連結 4 次元位相多様体 X_ℓ で次の性質を満たすものが存在する．

- X_ℓ は，ある初期計量に対して，正規化リッチフローの非特異解が存在するような，それぞれ異なる微分構造を少なくとも ℓ 個許容する．
- X_ℓ は，任意の初期計量に対して，正規化リッチフローの非特異解が存在しないような，それぞれ異なる微分構造を無限に許容する．

証明の詳細は複雑になるだけなのでここでは省略するが，証明の基本的なアイデアは上に述べたもので尽きている．さらに，単連結でない場合にも，この定理と類似した結果が成立することも知られている [33].

5.4　正規化リッチフローの特異点の存在定理

これまでは，非特異解の存在，非存在と異種微分構造との関連を強調してきた．ここでは少し異なる応用を主張のみだが紹介する．定理 5.6，定理 5.7 の主張にある非特異解の存在に対する障害は，非常に多くの 4 次元多様体上の正規化リッチフローがどんな初期計量を取ろうとも非特異解を許容しないことを主張している．すなわち，どのような初期計量に対しても，正規化リッチフローの解 $\{g(t)\}$, $t \in [0,T)$, はどこかの時刻 $T \leq \infty$ で必ず曲率が発散し，**特異点**を発生させる．これらの定理を使って，4 次元の正規化リッチフローの特異点の存在に関連する次の結果を証明することができる．

定理 5.15 ([31])　$\alpha + \beta \equiv 0 \pmod 2$ を満たす任意の整数の対 (α, β) は，次の性質を満たす 4 次元多様体 X のオイラー数と符号数の対 $(\chi(X), \tau(X))$ として実現できる：X 上の任意の初期計量に対して，正規化リッチフローが時刻 $T \leq \infty$ で特異点を発生させる．

任意の 4 次元多様体のオイラー数 χ と符号数 τ は $\chi + \tau \equiv 0 \pmod 2$ を満たすので，この定理の $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod 2$ という仮定は最良で，これ以上弱めることはできない．このように，どのような初期計量を取ろうとも，正規化リッチフローが特異点を発生させるような多様体は，4 次元では非常に一般的に存在することになる．またこの定理で出現する特異点は，解のスカラー曲率が発散するようなものになっていることも確かめることができる．

6　総括と予想

本稿で解説した内容の簡単なまとめと関連する予想をいくつか述べることで，本稿の終わりとしたい．さて，本稿の主題は，正規化リッチフローの非特異解の存在，非存在が微分構造の取り方に依存するということであった．すな

わち，4 次元位相多様体で次の性質を満たすものが存在することを解説した．

- 正規化リッチフローが，ある初期計量に対して非特異解をもつような，微分構造を許容する．

さらに一方，

- 正規化リッチフローが，任意の初期計量に対して非特異解をもたないような，微分構造も許容する．

一言で表現すれば，非特異解の存在が微分構造に制限を与えるということである．このような現象を見出すためには，サイバーグ - ウイッテン方程式と正規化リッチフローの方程式を使って非特異解の存在に対する新しい障害を証明する必要があった．同様の現象が 5 次元以上の高次元でも起こっているのかどうかは大変興味深い問題であるが，おそらく高次元では見られない 4 次元特有の現象と考えられる．

一方，非特異解の存在が，微分構造を考える以前の位相構造にも制限を与えるという，ファン - ザーン (F. Fang, Y. Zhang, Z. Zhang) [15] による次の予想がある．

予想 6.1 ([15])　X を 4 次元多様体とし，$\bar{\lambda}(X) < 0$, $||X|| \neq 0$ と仮定する．ここで $||X||$ はグロモフ (M.Gromov) の単体体積 (simplicial volume) とよばれる X の位相不変量である．X 上の正規化リッチフローが非特異解をもてば，次の不等式が成立する．

$$2\chi(X) - 3|\tau(X)| \geq \frac{1}{1296\pi^2}||X||$$

X の**単体体積** $||X||$ の定義を述べよう．向き付けられた n 次元多様体 X の基本ホモロジー類 $[X] \in H_n(X, \mathbb{R})$ を表す任意のサイクル $\mathfrak{c}$ を，特異 k 単体 γ_k を使って $\mathfrak{c} = \sum a_k \gamma_k$ と書く．ここで $a_k \in \mathbb{R}$ である．このとき $|\mathfrak{c}| := \sum |a_i|$ と定義する．X の単体体積を次で定義する．

$$\|X\| := \inf_{\mathfrak{c}} \{|\mathfrak{c}| \mid [\mathfrak{c}] = [X]\}$$

ここで下限は X の基本ホモロジー類 $[X]$ を表すサイクル $\mathfrak{c}$ の全体でとる．

予想 6.1 は現在，未解決である．予想の主張にある不等式をファン - ザーン不等式とよぶことにする．予想 6.1 は非特異解の存在が多様体に位相的な制限を与えると予想している．一方，本稿で解説したように，非特異解の存在，非存在は位相構造だけではなく，微分構造にも依存している現象が起こっていた．この現象は，位相的な制限であるファン - ザーン不等式を満たしているが，どのような初期計量を取ろうとも非特異解を許容しないような 4 次元多様体の存在を示唆している．つまり，予想の逆は一般には成立しないだろうと予想される．実際，定理 5.6 と定理 5.7 のさらなる一般化を証明することにより，予想の逆は一般には成立しないことを証明できる．

定理 6.2 ([32])　予想 6.1 の逆は一般には成立しない．すなわち，$\|X\| \neq 0$ であり，ファン - ザーン不等式を満たすが，任意の初期計量に対して正規化リッチフローの非特異解が存在せず，$\bar{\lambda}(X) < 0$ であるような無限に異なる微分構造を許容する 4 次元位相多様体 X が無限に存在する．

正規化リッチフローの非特異解の自明な例としてアインシュタイン計量があるが，アインシュタイン計量に関する結果を考慮すると，ファン - ザーン予想は，**体積エントロピー** (volume entropy) の言葉を使ったさらに一般的な予想にまで拡張して定式化するのが自然であると思われる．そこで次の予想を提出しておく．

予想 6.3　X を 4 次元多様体とし，$\bar{\lambda}(X) < 0$, $V(X) \neq 0$ と仮定する．ここで $V(X)$ は X の体積エントロピーである．X 上の正規化リッチフローが非特異解をもてば，次の不等式が成立する．

$$2\chi(X) - 3|\tau(X)| \geq \frac{1}{54\pi^2} V(X)^4$$

この不等式を一般化されたファン - ザーン不等式とよぶことにする.

体積エントロピーの定義を述べておこう. (X, g) を n 次元リーマン多様体, $\hat{X}$ を X の普遍被覆とし, $\hat{g} \in \mathcal{R}_{\hat{X}}$ を X のリーマン計量 $g \in \mathcal{R}_X$ の $\hat{X}$ への持ち上げとする. 任意の点 $p \in \hat{X}$ と計量 $\hat{g}$ に関して, 半径 R のボール $B(p, R)$ の体積 $vol(B(p, R))$ を考え, 次の量を導入する.

$$V(X, g) := \lim_{R \to \infty} \frac{\log vol(B(p, R))}{R}$$

このとき, X の体積エントロピーを次で定義する.

$$V(X) := \inf_g \{V(X, g) \mid g \in \mathcal{R}_X,\ vol_g = 1\}$$

体積エントロピーと単体体積は定義が全く異なるのだが, 次の関係があることが知られている.

$$\frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!} ||X|| \leq V(X)^n$$

ここで n は多様体の次元である. この関係式より予想 6.3 が正しければ, 予想 6.1 も正しいことがわかるので, 予想 6.3 は予想 6.1 の自然な一般化となっている. 予想 6.1 と同様に予想 6.3 も未解決だが, 定理 6.2 の証明と同様の方法で, 予想 6.3 の逆は一般には成立しないことを証明できる [32]. このような結果と本稿で解説した非特異解の存在, 非存在と異種微分構造の関係を考慮すると, 次の予想を立てるのは自然であろう.

予想 6.4　次の性質を満たす4次元位相多様体が存在する.

1. $V(X) \neq 0$ であり, さらに一般化されたファン - ザーン不等式を満たす.
2. X は, ある初期計量に対して正規化リッチフローが非特異解をもつような, 微分構造を許容する.

一方,

3. X は，負のペレルマン不変量をもち，さらに任意の初期計量に対して正規化リッチフローが非特異解をもたないような，微分構造も許容する．

予想 6.3 との関係を述べておく．予想 6.3 が正しければ，この予想の主張 2 から（$V(X) \neq 0$ という仮定の下で）主張 1 が従う．一方，上で述べたように予想 6.3 の逆は一般には成立しない．これは予想 6.4 の主張 1 と主張 3 を同時に満たす 4 次元位相多様体が存在することと同値である．よって予想 6.4 の新しい点は，主張 2 も同時に満たすような 4 次元位相多様体が存在するという部分である．

最後に，本稿で解説した非特異解の存在，非存在と異種微分構造との関係を 4 次元微分ポアンカレ予想（予想 2.3 を参照）と関連付けた予想として，大胆ではあるが，次を提出し本稿の締めくくりとしたい．

予想 6.5　4 次元ホモトピー球面で，任意の初期計量に対して正規化リッチフローの非特異解が存在しないものが存在する．

4 次元微分ポアンカレ予想が肯定的ならば，4 次元ホモトピー球面は 4 次元球面 S^4 に微分同相なので，特にアインシュタイン計量をもつ．したがって，正規化リッチフローの非特異解が存在する．つまり，4 次元微分ポアンカレ予想が肯定的に解決されれば，予想 6.5 は否定的に解決される．一方，4 次元微分ポアンカレ予想が否定的に解決されれば，予想 6.5 は肯定的に解決される可能性がある．しかし，4 次元微分ポアンカレ予想の否定解からは，解決のされ方にもよるが，直接従うわけではない．さらに何段階か証明すべきことがあるという意味でより深い帰結をもたらすと想像される．もちろん，予想 6.5 を肯定的に解決することにより，4 次元微分ポアンカレ予想を否定的に解決するという野心的な道もあり，大変興味深い予想であると筆者には思われる．

参考文献

[1] A. AKHMEDOV AND B. PARK, Exotic smooth structures on small 4-manifolds with odd signatures, arXiv:0701829 [math.GT] (2007)

[2] A. AKHMEDOV, R. BAYKUR AND B. PARK, Constructing infinitely many smooth structures on small 4-manifolds, math.DG/0703480v2 [math.GT] (2007)

[3] K. AKUTAGAWA, M. ISHIDA AND C. LEBRUN, Perelman's invariant, Ricci flow, and the Yamabe invariants of smooth manifolds, *Arch. Math.* **88** (2007), 71–76

[4] T. AUBIN, Equations du type Monge-Ampère sur les variétés Kählériennes compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris.* **283** (1976), 119–121

[5] S. BAUER AND M. FURUTA, Stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants: I, *Invent. Math.* **155** (2004), 1–19

[6] S. BAUER, Stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants: II, *Invent. Math.* **155** (2004), 21–40

[7] H.-D. CAO, Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds, *Invent. Math.* **81** (1985), 359–372

[8] H.-D. CAO AND B. CHOW, Recent developments on the Ricci flow, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S) **36** (1995), 59–74

[9] F. CATANESE AND C. LEBRUN, On the scalar curvature of Einstein manifolds, *Math. Res. Lett.* **4** (1997), 843–854

[10] S.K. DONALDSON, An application of gauge theory to four-dimensional topology, *J. Differential Geom.* **18** (1983), 279–315

[11] S.K. DONALDSON, Polynomial invariants for smooth four-manifolds, *Topology.* **29** (1990), 257–315

[12] S.K. DONALDSON AND P.B. KRONHEIMER, *The geometry of four-manifolds*, Oxford University Press, Oxford (1990)

[13] S.K. DONALDSON, The Seiberg-Witten equations and 4-manifold topology, *Bull. Amer. Math. Soc.* **33** (1996), 45–70

[14] M. Furuta, Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture, *Math. Res. Lett.* **8** (2001), 293–301

[15] F. Fang, Y. Zhang and Z. Zhang, Non-singular solutions to the normalized Ricci flow equation, *Math. Ann.* **340** (2008), 647–674

[16] P.M.N. Feehan and T.G. Leness, Witten's conjecture for many four-manifolds of simple type, arXiv:math/0609530v2 [math.DG] (2006)

[17] R. Fintushel, P. Park and R.J. Stern, Reverse engineering small 4-manifolds, math.GT/0701846 (2007)

[18] M. Freedman, On the topology of 4-manifolds, *J. Differential Geom.* **17** (1982), 357–454

[19] M. Freedman, R. Gompf, S. Morrison and K. Walker, Man and machine thinking about the smooth 4-dimensional Poincaré conjecture, airXiv:0906.5177v1 (2009)

[20] 深谷賢治，『ゲージ理論とトポロジー』，シュプリンガー現代数学シリーズ (1995)

[21] 深谷賢治，ゲージ場の幾何学への誘い，『数理物理への誘い 2』，遊星社，66–94 (1997)

[22] R. Hamilton, Three manifolds with positive Ricci curvature, *J. Differential Geom.* **17** (1982), 255–306

[23] R. Hamilton, Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds, *Comm. Anal. Geom.* **7** (1999), 695–729

[24] N. Hitchin, On compact four-dimensional Einstein manifolds, *J. Differential Geom.* **9** (1974), 435–442

[25] 伊藤克司，$N = 2$ 超対称 Yang-Mills 理論と Seiberg-Witten 方程式，『別冊 数理科学』，特集「場の理論」，サイエンス社，63–70 (1999)

[26] M. Ishida and C. LeBrun, Spin manifolds, Einstein metrics, and differential topology, *Math. Res. Lett.* **9** (2002), 229–240

[27] M. Ishida and C. LeBrun, Curvature, connected sums, and Seiberg-Witten theory, *Comm. Anal. Geom.* **11** (2003), 809–836

[28] M. Ishida, Constraints on the Seiberg-Witten basic classes of Einstein 4-manifolds with negative scalar curvature, preprint (2006).

[29] 石田政司，Einstein 計量，Ricci 流，そして異種微分構造，『数学』，第 59 巻，第 4 号，399–416 (2007)

[30] M. Ishida, The normalized Ricci flow on four-manifolds and exotic smooth structures, arXiv:0807.2169 [math.DG] (2008)

[31] M. Ishida, Normalized Ricci flow, singularity, and surgeries of four-manfiolds, preprint (2009).

[32] M. Ishida, Normalized Ricci flow, volume entropy, and smooth structures, now in progress.

[33] M. Ishida and I. Suvaina, Smooth structures and normalized Ricci flows on non-simply connected four-manfiolds, to appear in *Annals of Global Analysis and Geometry.*

[34] M. Ishida, R. Rasdeaconu and I. Suvaina, On normalized Ricci flow and exotic smooth structures on four-manifolds with $b^+ = 1$, to appear in *Archiv der Mathematik.*

[35] B. Kleiner and J. Lott, Notes on Perelman's papers, arXiv: math.DG/0605667 (2006)

[36] O. Kobayashi, Scalar curvature of a metric of unit volume, *Math. Ann.* **279** (1987), 253–265

[37] P.B. Kronheimer, Minimal genus in $S^1 \times M$, *Invent. Math.* **135** (1999), 45–61

[38] P.B. Kronheimer and T. Mrowka, Embedded surfaces and the structure of Donaldson polynomial invariants, *J. Differential Geom.* **41** (1995), 573–734

[39] C. LeBrun, Einstein metrics and Mostow rigidity, *Math. Res. Lett.* **2** (1995), 1–8

[40] C. LeBrun, Polarized 4-manifolds, extremal Kähler metrics, and Seiberg-Witten theory, *Math. Res. Lett.* **2** (1995), 653–662

[41] C. LeBrun, Four-manifolds without Einstein metrics, *Math. Res. Lett.* **3** (1996), 133–147

[42] C. LEBRUN, Ricci curvature, minimal volumes, and Seiberg-Witten theory, *Invent. Math.* **145** (2001), 279–316

[43] C. LEBRUN, Hyperbolic manifolds, harmonic forms, and Seiberg-Witten invariants, Proceedings of the Euroconference on Partial Differential Equations and their Applications to Geometry and Physics (Castelvecchio Pascoli, 2000), *Geom. Dedicata.* **91** (2002), 137–154

[44] C. LEBRUN, Einstein metrics, four-manifolds, and differential topology, *Surveys in Differential Geometry*, vol. VIII, S.-T. Yau, editor, International Press, 235–255 (2003)

[45] C. LEBRUN, Four-manifolds, curvature bounds, and convex geometry, arXiv: math.DG/0611450 (2006)

[46] Y. MATSUMOTO, On bounding genus of homology 3-spheres, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math.* **29** (1982), 287–318

[47] 松本幸夫,『4 次元のトポロジー』, 日本評論社 (1991)

[48] 松本幸夫,『トポロジーへの誘い―多様体と次元をめぐって』, 遊星社 (2008)

[49] 満渕俊樹, アインシュタイン計量とモジュライ空間,『数理物理への誘い 2』, 遊星社, 95–113 (1997)

[50] J. MILNOR, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Ann. Math.* **64** (1956), 399–405

[51] J. MORGAN, *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*, Mathematical Notes, Princeton Universitity Press. (1996)

[52] J. PARK, The geography of spin symplectic 4-manifolds, *Math. Z*·**240** (2002), 405–421

[53] J. PARK AND K.H. YUN, Exotic smooth structures on $(2k+2\ell-1)\mathbb{C}P^2\#(2k+4\ell-1)\overline{\mathbb{C}P^2}$, arXiv: math.DG/0703619 [math.DG] (2007)

[54] H. PARK, J. PARK AND D. SHIN, A simply connected surface of general type with $p_g=0$ and $K^2=4$, arXiv:0803.3667v3 [math.AG] (2008)

[55] G. PERELMAN, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv: math.DG/0211159 (2002)

[56] G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds, arXiv: math.DG/0303109 (2003)

[57] G. Perelman, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, arXiv: math.DG/0307245 (2003)

[58] R. Rasdeaconu and I. Suvaina, Smooth structures and Einstein metrics on $\mathbb{C}P^2\#5,6,7\overline{\mathbb{C}P^2}$, to appear in *Math. Proc. Cambridge Philos*, arXiv:0806.1424 [math.DG] (2008)

[59] 佐古彰史，『超対称ゲージ理論と幾何学—非摂動的アプローチ』，日本評論社 (2007)

[60] R. Schoen, Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics, *Lec. Notes Math.* **1365** (1987), 120–154

[61] S. Smale, Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than 4, *Ann. Math.* **74** (1961), 391–406

[62] 鈴木久男，双対性の衝撃—素粒子理論最前線に何が起こったか？，『別冊 数理科学』，特集「双対性の世界」，サイエンス社，14–23 (2007)

[63] C.H. Taubes, The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms, *Math. Res. Lett.* **1** (1994), 809–822

[64] J.A. Thorpe, Some remarks on the Gauss-Bonnet formula, *J. Math. Mech.* **18** (1969), 779–786

[65] G.Tian, On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class, *Invent. Math.* **101** (1990), 101–172

[66] E. Witten, Monopoles and four-manifolds, *Math. Res. Lett.* **1** (1994), 769–796

[67] H. Yamabe, On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Osaka. Math. J.* **12** (1960), 21–37

[68] S.-T. Yau, Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, *Proc. Nat. Acad. USA.* **74** (1977), 1789–1799

編者 河東泰之（かわひがし・やすゆき）——東京大学大学院数理科学研究科

著者 石田政司（いしだ・まさし）——上智大学理工学部情報理工学科

伊東恵一（いとう・けいいち）——摂南大学工学部数学物理系教室

小嶋　泉（おじま・いずみ）——京都大学数理解析研究所

数理物理への誘い 7——最新の動向をめぐって

2010年1月9日　初版第1刷発行

定価はカバーに
表示しています

編　者　河東泰之

発行者　西原昌幸

発行所　遊 星 社

164-0001 東京都中野区中野3丁目50-1

電話 (03)3381-5914　振替 00140-5-137657

発売元　星 雲 社

112-0012 東京都文京区大塚3丁目21-10

電話 (03)3947-1021　Fax (03)3947-1617

印刷・製本＝平河工業社　ISBN978-4-434-14128-7